1. Факты проективной геометрии

1.1. Сложное отношение четырех точек

Опр. *Пусть A, B, C и D — четыре различные точки проективного пространства, лежащие на одной прямой, и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – порождающие их векторы. Пусть также $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$. Элемент $\omega = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$ называется* ***сложным (двойным) отношением*** *точек A, B, C, D.*

Сложное отношение четырех точек A, B, C, D обозначается (AB, CD).

Определение корректно. Точки A, B, C, D прямой различны, а поэтому порождающие их векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ попарно линейно независимы и принадлежат двухмерному линейному пространству. Так можно записать $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$ для α, β, γ, δ, причем $\alpha, \delta \neq 0$. Отсюда сложное отношение существует. Если векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$, $\vec{d}'$ порождают те же точки, то $\vec{a} = \lambda_a\vec{a}'$, $\vec{b} = \lambda_b\vec{b}'$, $\vec{c} = \lambda_c\vec{c}'$, $\vec{d} = \lambda_d\vec{d}'$. Подставляя, $\lambda_c\vec{c}' = \alpha\lambda_a\vec{a}' + \beta\lambda_b\vec{b}'$, $\lambda_d\vec{d}' = \gamma\lambda_a\vec{a}' + \delta\lambda_b\vec{b}'$ или $\vec{c}' = \frac{\alpha\lambda_a}{\lambda_c}\vec{a}' + \frac{\beta\lambda_b}{\lambda_c}\vec{b}'$, $\vec{d}' = \frac{\gamma\lambda_a}{\lambda_d}\vec{a}' + \frac{\delta\lambda_b}{\lambda_d}\vec{b}'$. Теперь запишем новое сложное отношение $\frac{\beta\lambda_b\gamma\lambda_a}{\alpha\lambda_a\delta\lambda_b} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$, то есть сложное отношение определено однозначно.

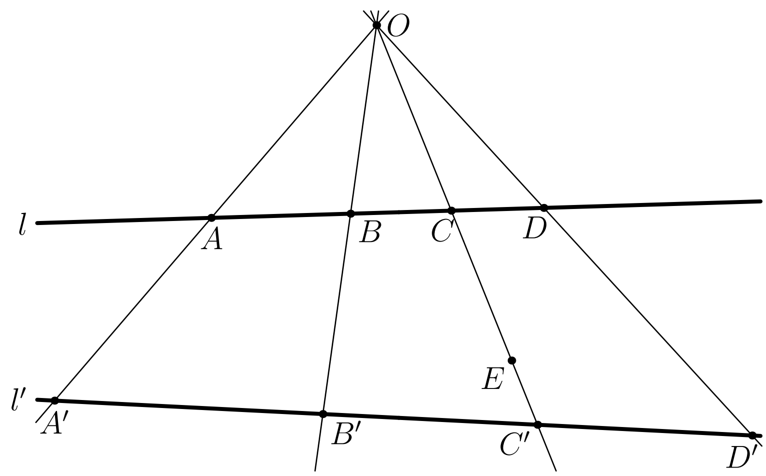
Теор 1 (Свойства)**.**

1. $(AB, CD) = (CD, AB)$
2. $(AB, DC) = (BA, CD) = \dfrac{1}{(AB, CD)}$
3. $(AC, BD) = (DB, CA) = 1 - (AB, CD)$

Док-во. Непосредственно по определению. □

Теор 2. *Сложное отношение сохраняется при центральном проектировании.*

Док-во. Пусть точки A, B, C, D принадлежат проективной прямой l и A', B', C', D' — их проекции из центра O на прямую l'. Возьмем точку E на прямой OC отличную от O, C и C'. Рассмотрим проективные реперы плоскости



R и R', согласованные с точками (A, B, O, E) и (A', B', O, E) соответственно.

В репере R имеем $A'(1:0:a)$, $B'(0:1:b)$, $O(0:0:1)$ и $E(1:1:1)$. Запишем формулы преобразования координат при переходе от R к R':

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ k_1 a & k_2 b & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Для согласованности столбцов $\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & 0 & 1 \\ k_1 a & k_2 b & k_3 & 1 \end{pmatrix}$ берем $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1 - a - b$. Формулы превращаются в

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x'_1 \\ \lambda x_2 = x'_2 \\ \lambda x_3 = a x'_1 + b x'_2 + (1 - a - b) x'_3 \end{cases}$$

Пусть в репере R точка D будет иметь координаты $(d_1 : d_2 : 0)$, а в R' — $D(d'_1 : d'_2 : d'_3)$. Тогда $\frac{d_1}{d_2} = \frac{d'_1}{d'_2}$ с одной стороны.

Теперь покажем, что в репере на прямой l, согласованном с точками (A, B, C), точка D будет иметь координаты $(d_1 : d_2)$. Действительно, точка C лежит на l с уравнением $x_3 = 0$, а еще на прямой OE с уравнением $x_1 - x_2 = 0$, поэтому $C(1:1:0)_R$. Для некоторого базиса из R обозначим $\vec{a}, \vec{b}$ его векторы, порождающие A, B. Тогда вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ порождает C. Кроме того,

$\vec{d} = d_1\vec{a} + d_2\vec{b}$ порождает D. Это означает, что в согласованном с (A, B, C) базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ точка D имеет координаты (d_1, d_2). Отсюда $(AB, CD) = \frac{d_1}{d_2}$.

Аналогично, в репере на прямой l', согласованном с (A', B', C'), точка D' будет иметь координаты $(d'_1 : d'_2)$. Поэтому $(A'B', C'D') = \frac{d'_1}{d'_2}$. Таким образом, $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. □

Теор 3. *Если в проективном репере на прямой известны координаты точек* $A(a_1 : a_2)$, $B(b_1 : b_2)$, $C(c_1 : c_2)$, $D(d_1 : d_2)$, *то*

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}$$

Док-во. Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$ для α, β, γ, δ. Выписывая координаты векторов в некотором общем базисе из проективного репера, получаем $\begin{cases} \lambda_c c_1 = \alpha\mu a_1 + \beta\nu b_1 \\ \lambda_c c_2 = \alpha\mu a_2 + \beta\nu b_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \lambda_d d_1 = \gamma\mu a_1 + \delta\nu b_1 \\ \lambda_d d_2 = \gamma\mu a_2 + \delta\nu b_2 \end{cases}$. Решения по формулам Крамера $\alpha = \frac{\lambda_c\nu\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $\beta = \frac{\lambda_c\mu\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $\gamma = \frac{\lambda_d\nu\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, $\delta = \frac{\lambda_d\mu\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\mu\nu\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$.

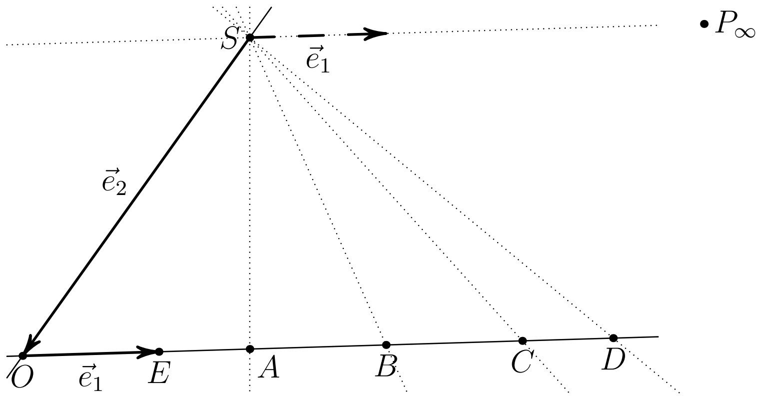
Соотношение $\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$ дает искомое выражение. □

В модели проективной прямой, называемой расширенной прямой, сложное отношение можно представить следующим образом через простое отношение:

След 1. *Если в аффинном репере на расширенной прямой даны четыре точки* $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, *то сложное отношение этих точек по вычисляется формуле:*

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}.$$

Док-во. Пусть $(O, \vec{e}_1)$ — аффинный система координат на той прямой, которая вместе с бесконечно удаленной точкой P_∞ образует расширенную прямую. Заметим, что в модели расширенной прямой точку P_∞ порождает $\vec{e}_1$. Обозначим $E = O + \vec{e}_1$. Зададим согласованный с точками (P_∞, O, E)



проективный репер $\mathcal{R}$, который определяется базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. В репере $\mathcal{R}$ точка A имеет проективные координаты $(a : 1)_\mathcal{R}$, так как порождается вектором $\vec{e}_2 + a\vec{e}$, и, аналогично, $B(b : 1)_\mathcal{R}$, $C(c : 1)_\mathcal{R}$, $D(d : 1)_\mathcal{R}$. По Теор. 3

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a-c)(d-b)}{(c-b)(a-d)} = \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b}.$$

Но если простое отношение (AB, C) равно λ, то $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Поэтому $(c-a)\vec{e}_1 = \lambda(b-c)\vec{e}_1$, а значит и $\lambda = \frac{c-a}{b-c}$. Аналогично $(AB, D) = \frac{d-a}{b-d}$. □

Опр. *Говорят, что пара (A, B) разделяет пару (C, D), если $(AB, CD) < 0$ и не разделяет, если $(AB, CD) > 0$.*

Опр. *Говорят, что пара точек (A, B) разделяет пару точек (C, D) гармонически, если сложное отношение $(AB, CD) = -1$. В этом случае упорядоченную четверку точек A, B, C, D называют гармонической четверкой точек.*

След 2. *Гармоническая разделенность двух пар точек не зависит ни от порядка пар точек, ни от порядка точек в каждой паре.*

1.2. Теорема Дезарга

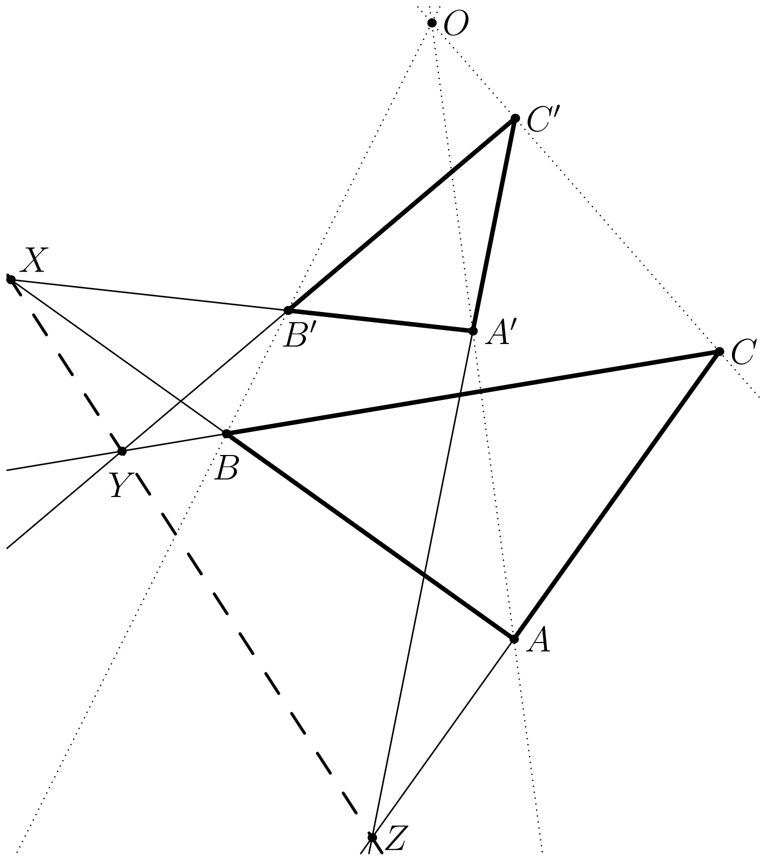
Опр. ***Трехвершинником*** *называют фигуру, состоящая из трех точек общего положения и трех прямых, которые задаются всевозможными парами этих точек.*

Эти три точки называют *вершинами*, а прямые называют *сторонами.*

Опр. *Два трехвершинника ABC и $A_1B_1C_1$ называются* ***перспективными****, если прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку.*

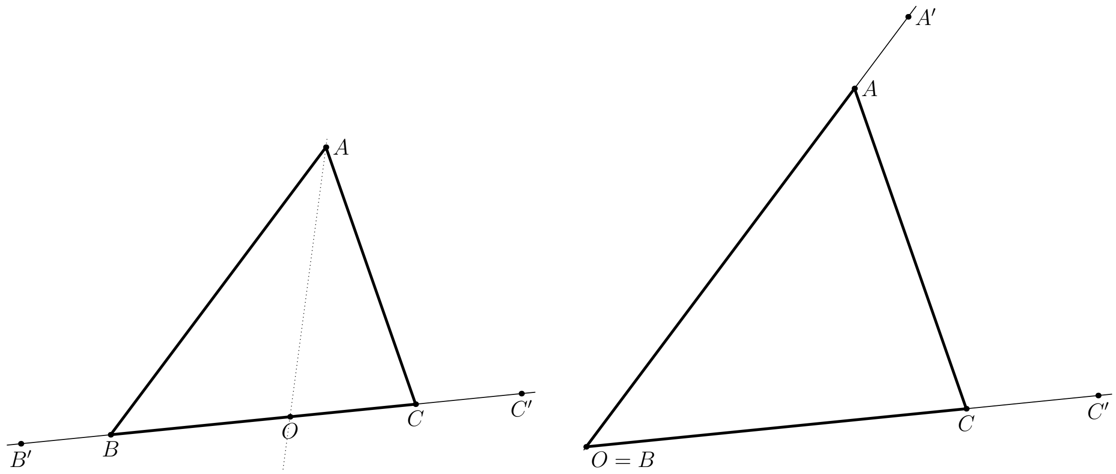
Эту точку называют *центром перспективы.*

Теор 4 (Дезарг)**.** *Если два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ перспективны, то их соответственные стороны пересекаются в трех точках, которые лежат на одной прямой.*



Док-во. Если центр перспективы O лежит на одной из прямых трехвершинника ABC, то с той прямой совпадает соответствующая ей из $A'B'C'$ (см. рис.). Значит она пересекается с прямой, соединяющей два других пересечения соответствующих сторон и условие выполнено. Предположим поэтому, что это не так.

Если пара соответствующих точек совпадает, то в ней будут пересекаться две пары сторон и утверждение теоремы выполняется. Предположим, что соответствующие точки различны.



Зададим проективный репер, согласованный с точками (A, B, C, O).

Точка A' лежит на прямой OA с уравнением $x_2 - x_3 = 0$ и отлична от $A(1:0:0)$, поэтому $A'(a:1:1)$. Также $B'(1:b:1)$ и $C'(1:1:c)$.

Пусть прямые AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ пересекаются в точках X, Y, Z соответственно. Точка X лежит на прямой AB с уравнением $x_3 = 0$ и на прямой $A'B'$ с уравнением $(1-b)x_1 + (1-a)x_2 + (ab-1)x_3 = 0$, а значит имеет координаты $X(a-1:1-b:0)$. Для остальных, $Y(a-1:0:1-c)$ и $Z(0:1-b:c-1)$. Так как $\begin{vmatrix} a-1 & 1-b & 0 \\ a-1 & 0 & 1-c \\ 0 & 1-b & c-1 \end{vmatrix} = 0$, точки X, Y, Z лежат на одной прямой. $\square$

По принципу двойственности верна

Теор 5 (обратная теорема Дезарга)**.** *Пусть даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$. Если точки пересечения сторон $X \in AB \cap A'B'$, $Y \in AC \cap A'C'$ и $Z \in BC \cap B'C'$ лежат на одной прямой, то эти трехвершинники перспективны.*