1. Проективное пространство

1.1. Определение и модели

Пусть V— $(n+1)$-мерное линейное пространство над полем F. На множестве $V^* = V \setminus \{\vec{0}\}$ через $\sim$ обозначим отношение *коллинеарности*, то есть $\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{y}$ для некоторого $0 \neq \lambda \in F$. Отношение $\sim$ будет эквивалентностью.

Опр. ***Проективным пространством*** *P, порожденным линейным пространством V, называется фактор множество $V^*/{\sim}$.*

Элементы проективного пространства называют *"точками"*. То есть "точки" проективного пространства — это классы коллинеарных векторов.

Для проективного пространства P существует каноническая проекция $\pi : V \setminus \{\vec{0}\} \to P$, ставящая в соответствие всякому вектору класс коллинеарных ему векторов. Если $M = \{\lambda\overrightarrow{m} \mid \lambda \in F, \lambda \neq 0\}$, то говорят вектор $\overrightarrow{m}$ **порождает** точку M: $\pi(\overrightarrow{m}) = M$.

Опр. ***Размерностью*** *проективного пространства P, порожденного линейным пространством V, называется число $n = \dim V - 1$.*

Пространство размерности 1 называется *проективной прямой*, размерности 2 — *проективной плоскостью.*

Опр. *Множество $\mathcal{P}$ называется* ***моделью*** *проективного пространства P, если существует биекция $\varphi : P \to \mathcal{P}$.*

Рассмотрим примеры моделей проективного пространства.

Прим 1 (Связка прямых). *Пусть $\mathcal{A}^{n+1}$ — $(n+1)$-мерное аффинное пространство над линейным пространством V^{n+1} и S — некоторая точка $\mathcal{A}^{n+1}$. Зададим модель для проективного пространства P^n, порожденного V^{n+1}. Обозначим $\mathcal{P}$ связку прямых, проходящих через S, и определим отображение $\varphi : P^n \to \mathcal{P}$, которое каждому классу векторов, порожденному $\vec{x}$, из P^n ставит в соответствие прямую из $\mathcal{P}$ с направляющим вектором $\vec{x}$.*

Прим 2 (Сфера). *Пусть дана единичная гиперсфера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{A}^{n+1}$ над линейным пространством V^{n+1}. Обозначим $\mathcal{P}$ множество всех пар диаметрально противоположных точек гиперсферы. Отображение φ каждому классу коллинеарных векторов ставит в соответствие пару точек пересечения прямой, проходящей через центр гиперсферы параллельно этим векторам, с гиперсферой.*

Прим 3 (Расширенная гиперплоскость). *Пусть $\mathcal{A}^{n+1}$ — $(n+1)$-мерное аффинное пространство над линейным пространством V^{n+1}, $S \in \mathcal{A}^{n+1}$ и σ — некоторая гиперплоскость в $\mathcal{A}^{n+1}$, причем $S \notin \sigma$. Зададим модель для проективного пространства P^n, порожденного V^{n+1}.*

Дополним $\mathcal{A}^{n+1}$ элементами, которые называются "бесконечно удаленными точками", так, что каждой прямой в $\mathcal{A}^{n+1}$ соответствует одна такая точка, параллельным прямым — одинаковые, а не параллельным — разные. Каждую прямую, дополненную соответствующей ей "бесконечно удаленной" точкой, называют "расширенной прямой". Гиперплоскость σ, дополненная "бесконечно удаленными" точками лежащих в ней прямых, называется "расширенной гиперплоскостью" (то же касается любых плоскостей). Ее мы обозначим $\mathcal{P}$.

Определим отображение $\varphi : P^n \to \mathcal{P}$, которое каждому классу векторов, порожденному $\overrightarrow{m} \in P^n$, поставит в соответствие точку пересечения расширенной прямой, проходящая через S параллельно $\overrightarrow{m}$, и расширенной гиперплоскости $\mathcal{P}$.

В случае, когда $\overrightarrow{m}$ не параллелен σ, прямая $l = S + L(\overrightarrow{m})$ пересечет σ в точке из $\mathcal{A}^{n+1}$; если же прямая l параллельна σ, то расширенная прямая, задаваемая l, пересечет расширенную прямую, параллельную l и лежащую в σ, в бесконечно удаленной точке.

1.2. Проективный репер

Опр. *Два базиса $(\vec{u}_i)$ и $(\vec{v}_i)$ $(n+1)$-мерного линейного пространства V называются* ***гомотетичными****, если существует такое $\lambda \in F$, что $\vec{v}_i = \lambda \vec{u}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n+1$.*

Опр. ***Проективной системой координат*** *(репером) проективного простран-*

ства P^n, порожденного линейным пространством V^{n+1}, называется класс гомотетичных базисов линейного пространства V^{n+1}.

Пусть M — точка проективного пространства P^n для которой вектор $\overrightarrow{m}$ является порождающим.

Опр. ***Проективными*** *(или однородными)* ***координатами*** *точки M в проективном репере $\mathcal{R}$ называют класс ненулевых наборов, пропорциональных координатам $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ вектора $\overrightarrow{m}$ в некотором базисе из $\mathcal{R}$, обозначаемый $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}}$.*

Такое определение корректно. Возьмем проективные координаты точки $M\ (x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}}$ и $(y_1 : y_2 : \dots : y_{n+1})_{\mathcal{R}}$. Тогда $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ — координаты какого-то вектора $\vec{x}$, порождающего M, в некотором базисе σ из $\mathcal{R}$, и $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ — координаты $\vec{y}$, порождающего M, в базисе σ' из $\mathcal{R}$. По определению, $\vec{x} = \mu\vec{y}$ для подходящего μ. Расписывая это равенство по базисам σ и σ', которые пропорциональны с некоторым коэффициентом λ, получаем, что взятые вначале проективные координаты пропорциональны с коэффициентом $\mu\lambda$.

Опр. *Точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ проективного пространства называют* ***точками общего положения****, если порождающие их векторы линейно независимы;*
Точки $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ называют ***точками почти общего положения****, если любые k из низ являются точками общего положения.*

Опр. *Пусть в проективном пространстве задан репер $\mathcal{R}$. Говорят, что базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}$ из $\mathcal{R}$ согласован с последовательностью точек почти общего положения $A_1, \dots, A_{n+2}$, если $\vec{e}_i$ порождает A_i для всех $i = 1, \dots, n+1$, и $\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_{n+1}$ порождает A_{n+2}.*

Теор 1. *В проективном пространстве для любой максимальной последовательности точек почти общего положения существует единственный проективный репер $\mathcal{R}$ такой, что каждый принадлежащий ему базис согласован с данной последовательностью точек.*

Док-во. Пусть $A_1, \dots, A_{n+2}$ — максимальная последовательность точек почти общего положения, и $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+2}$ — порождающие их векторы. Тогда $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n+1}$ — базис линейного пространства, и $\vec{a}_{n+2} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots \lambda_{n+1}\vec{a}_{n+1}$ для некоторого ненулевого набора λ_i. Векторы $\vec{e}_1 = \lambda_1\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_{n+1} = \lambda_{n+1}\vec{a}_{n+1}$ также образуют базис, который согласован с точками $A_1, \dots, A_{n+2}$. Для любого базиса, гомотетичного рассмотренному, это тоже верно. Получили репер $\mathcal{R}$, согласованный с точками.

Пусть $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$ — еще один базис, который согласован с последовательностью $A_1, \dots, A_{n+2}$. Тогда $\vec{v}_i$ порождает A_i и поэтому $\vec{v}_i = \mu_i\vec{e}_i$ для всех $i = 1, \dots, n+1$. Кроме того, $\vec{v}_1 + \dots \vec{v}_{n+1} = \mu_{n+2}(\vec{e}_1 + \dots \vec{e}_{n+1})$ для некоторого μ_{n+2}. Отсюда $\mu_1\vec{e}_1 + \dots \mu_{n+1}\vec{e}_{n+1} = \mu_{n+2}\vec{e}_1 + \dots \mu_{n+2}\vec{e}_{n+1}$ и, с учетом линейной независимости, $\mu_i - \mu_{n+2} = 0$ для всех $i \leqslant n+1$. Таким образом, базис $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$ гомотетичен $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}$. Показано, что любой базис, согласованный с последовательностью $A_1, \dots, A_{n+2}$ принадлежит реперу $\mathcal{R}$. □

Теор 2 (формулы преобразования координат). *Пусть в проективном пространстве заданы два репера $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Тогда для координат $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})_{\mathcal{R}}$ и $(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_{n+1})_{\mathcal{R}'}$ точки M верны формулы*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$$

где $\lambda \neq 0$ и C — матрица перехода от некоторого базиса из $\mathcal{R}$ к базису из $\mathcal{R}'$.

Док-во. Пусть $\sigma \in \mathcal{R}$ и $\sigma' \in \mathcal{R}'$ и вектор $\overrightarrow{m}$ порождает M. Для некоторого μ координаты $\overrightarrow{m}$ в базисе σ можно записать $(\mu x_1, \dots, \mu x_{n+1})$ и, аналогично, $(\mu' x_1, \dots, \mu' x_{n+1})$ — координаты $\overrightarrow{m}$ в σ'. Обозначив C матрицу перехода от σ к σ' и $\lambda = \frac{\mu}{\mu'}$, получаем указанную формулу. □