1. Движение евклидова пространства

1.1. Определение и свойства

Опр. *Биекцию евклидова аффинного пространства на себя называют движением, если она сохраняет расстояние между любыми двумя точками.*

Прим 1.

сдвиг на вектор

симметрия относительно точки

Опр. *Линейный оператор φ называется* ортогональным, *если для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ верно $\vec{x}\vec{y} = \varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})$ (сохраняется скалярное произведение).*

Теор 1 (Свойства).

1. *Движение является аффинным преобразованием*
2. *Линейный оператор, являющийся однородной частью движения, является ортогональным*
3. *Для всякого движения существует обратное*

Док-во. Пусть g — движение евклидова аффинного пространства $\mathcal{A}$ над линейным пространством V. Обозначим $\varphi : V \to V$, заданное равенством $\varphi(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{g(X)g(Y)}$ для любых точек X и Y. Установим, что φ — линейный оператор и подходит в качестве однородной части g.

Сначала проверим, что φ сохраняет скалярное произведение. Для произвольных $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ выполняется $|\vec{x} + \vec{y}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| =^* g$ сохраняет расстояние $^*= |\overrightarrow{g(A)g(C)}| = |\overrightarrow{g(A)g(B)} + \overrightarrow{g(B)g(C)}| = |\varphi(x) + \varphi(y)|$. Возведем в квадрат начало и конец: $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y})^2 = |\vec{x}|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + |\vec{y}|^2$ с одной стороны и $|\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})|^2 = |\varphi(\vec{x})|^2 + 2\varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y}) + |\varphi(\vec{y})|^2$ с другой. Подставляя $\vec{y} = \vec{0}$, с учетом $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\overrightarrow{XX}) = \overrightarrow{g(X)g(X)} = \vec{0}$, получим $|\varphi(\vec{x})| = |\vec{x}|$ для любого $\vec{x}$. Используя это, окончательно получаем

$$\vec{x}\vec{y} = \varphi(\vec{x})\varphi(\vec{y})$$

Теперь проверим, что φ — линейный оператор. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ — ортонормированный базис V. Тогда $\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ — также ортонормированный базис V, так как φ сохраняет длину векторов и их перпендикулярность. Для произвольного $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n$ посмотрим, какие координаты будут у $\varphi(\vec{x})$ в таком базисе. Для нахождения i-ой координаты $\varphi(x)$ в базисе $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ вычислим $\varphi(\vec{x})\varphi(\vec{e}_i) =^*$ используем полученное ранее сохранение скалярного произведения $^* = \vec{x}\vec{e}_i = \alpha_i$, то есть $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1\varphi(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n\varphi(\vec{e}_n)$. Из этих соотношений для координат сразу следует, что для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ и числа λ выполняется $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(y)$ и $\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})$, то есть φ — линейный оператор.

Осталось убедиться, что $g(M+\vec{v}) = g(M)+\varphi(\vec{v})$ для любых M и $\vec{v}$. Обозначим $M + \vec{v} = N$. Тогда $g(M) + \varphi(\vec{v}) = g(M) + \varphi(\overrightarrow{MN}) = g(M) + \overrightarrow{g(M)g(N)} = g(N) = g(M + \vec{v})$. □

Теор 2. *Множество всех движений образует группу относительно композиции отображений.*

Теор 3. *Для того, чтобы преобразование евклидова пространства было движением, необходимо и достаточно, чтобы оно было аффинным и его однородная часть была ортогональным линейным оператором.*

В ортонормированной аффинной системе координат *формулы движения* будут являться формулами аффинного преобразования в которых матрица однородной части является *ортогональной* матрицей.

1.2. Классификация движений

Теор 4. *Любое движение двухмерного евклидова пространства (плоскости) есть движение одного из следующих видов:*

1. *тождественное преобразование,*
2. *параллельный перенос (сдвиг на вектор),*
3. *поворот вокруг точки,*

4. *симметрия относительно прямой (осевая симметрия),*

5. *симметрия относительно прямой и сдвиг вдоль нее (скользящая симметрия).*

Док-во. Формулы имеют вид $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Матрица C однородной части движения может быть одной из матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

В первом случае получается тождественное преобразование и сдвиг.

Во втором случае $\begin{cases} x_1' = -x_1 + a_1 \\ x_2' = x_2 + a_2 \end{cases}$ перейдем к новой системе координат формулами $\begin{cases} x_1 = x + a_1/2 \\ x_2 = y \end{cases}$ получим $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + a_2 \end{cases}$, а это симметрия относительно прямой $y = 0$ и сдвиг на вектор $(0, a_2)$.

В третьем случае перейдем к новому началу (a_1, a_2) координат, которое является неподвижной точкой, и получим формулы поворота вокруг начала координат. □