1. Евклидово пространство

1.1. Евклидово линейное пространство

Опр. *Линейное пространство V над полем $\mathbb{R}$ называется* ***евклидовым****, если на нем определено отображение $V \times V \to \mathbb{R}$ (называется* скалярным произведением*), удовлетворяющее свойствам:*

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
4. *если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}\vec{a} > 0$*

для любых $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Опр. ***Длиной*** *вектора $\vec{a}$ евклидового линейного пространства называется число*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$$

Опр. ***Углом*** *между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ евклидового линейного пространства называется любое число φ такое, что*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Такое число φ существует, то есть определение корректно, так как

$$-1 \leqslant \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leqslant 1$$

В самом деле, $0 \leqslant \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2 \pm 2\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2 = 2 \pm 2\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ и поэтому $-1 \leqslant \pm\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

1.2. Евклидово пространство

Опр. *Аффинное пространство $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{R}$ называется* ***евклидовым****, если* евклидовым *является линейное пространство, над которым рассматривается $\mathcal{A}$.*

Опр. ***Расстоянием*** *между точками A и B еквлидового пространства называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$.*

Базис $(\vec{e}_i)$ называется *ортонормированным*, если $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ и $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$.

Опр. *Аффинная система координат $\mathcal{R}(O, \delta)$ называется* ***ортонормированной****, если базис δ является* ортонормированным.

Легко проверить, что скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат в некотором ортонормированном базисе:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

для $\vec{x}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y}(y_1, \ldots, y_n)$.

Теор 1 (смысл коэффициентов общего ур-я)**.** *Коэффициенты в общем уравнении k-мерной плоскости в ортонормированной системе координат являются координатами векторов, ортогональных данной плоскости.*

Опр. ***Ортогональной проекцией*** *точки M на плоскость $\pi = M_0 + V^k$ называется такая точка $P \in \pi$, что $\overrightarrow{MP}$ перпендикулярен любому вектору из V^k.*

Теор 2. *Ортогональная проекция любой точки на любую плоскость существует и единственна.*

Опр. ***Расстоянием*** *от точки M до k-мерной плоскости π в евклидовом пространстве называется расстояние между M и ее ортогональной проекцией на π.*

Теор 3. *Пусть в ортонормированной системе координат* R *гиперплоскость* π *задана уравнением* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$*. Тогда расстояние от точки* $M(y_1, y_2, \ldots, y_n)_R$ *до* π *равно*

$$\frac{|a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}$$