1. Аффинное преобразование

1.1. Определение

Опр. ***Аффинным преобразованием*** *аффинного пространства $\mathcal{A}(V)$ называется всякое биективное отображение $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, такое что существует линейный оператор $\varphi\colon V \to V$, для которого*

$$f(M + \vec{v}) = f(M) + \varphi(\vec{v}) \text{ для любых } M \in \mathcal{A} \text{ и } \vec{v} \in V$$

Этот линейный оператор φ называется **однородной частью** аффинного преобразования f.

Так как для $N = M + \overrightarrow{MN}$ можно записать $f(N) = f(M + \overrightarrow{MN}) = f(M) + \varphi(\overrightarrow{MN})$, то делаем вывод, что

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$$

для любых точек $M, N \in \mathcal{A}$.

След 1. *Однородная часть аффинного преобразования является биективным оператором.*

Прим 1. *1. $t_{\vec{v}}$ — сдвиг на вектор $\vec{v}$ (параллельный перенос):*

$$t_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v}$$

2. $h_{O,k}$ — гомотетия с центром O и коэффициентом $k \neq 0$:

$$h_{O,k}(M) = O + k\overrightarrow{OM}$$

Теор 1 (Формулы аффинного преобразования)**.** *Пусть $\mathcal{R}(O, \sigma)$ — аффинная система координат и f — аффинное преобразование.*

Тогда, если $O' = f(O)$, $M' = f(M)$, C — матрица однородной части преобразования f в базисе σ и $O'(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$, $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$, $M'(x'_1, \dots, x'_n)_{\mathcal{R}}$, то верны формулы

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Док-во. $f(M) = M' = O' + \overrightarrow{O'M'} = O' + \overrightarrow{f(O)f(M)} = O' + \varphi(\overrightarrow{OM})$ □

Опр. *Пусть A, B и C — точки аффинного пространства и*

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$$

для некоторого числа λ.

*Тогда λ называется **простым отношением** трех точек A, B и C, и обозначается (AB, C).*

Теор 2 (Свойства).

1. *При аффинном преобразовании сохраняется простое отношение трех точек*

2. *Для всякого аффинного преобразования существует обратное*

3. *При аффинном преобразовании образом k-мерной плоскости является k-мерная плоскость*

4. *При аффинном преобразовании сохраняется взаимное расположение плоскостей (совпадение, включение, пересечение, параллельность, скрещивание)*

Док-во. 1. Из $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ следует $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \varphi(\lambda\overrightarrow{CB}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{CB})$, а значит $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(C)f(B)}$.

2. Пусть f — преобразование с однородной частью φ. Так как f биективно, существует обратное отображение f^{-1}. Оператор φ тоже биективный. Обратное отображение φ^{-1} является линейным оператором. Покажем, что f^{-1} является аффинным отображением. Возьмем любую точку M и вектор $\vec{v}$. Чтобы установить $f^{-1}(M + \vec{v}) = f^{-1}(M) + \varphi^{-1}(\vec{v})$, достаточно вычислить $f(f^{-1}(M) + \varphi^{-1}(\vec{v})) = f(f^{-1}(M)) + \varphi(\varphi^{-1}(\vec{v})) = M + \vec{v}$.

3. Образом k-мерной плоскости $M+V^k$ будет $f(M+V^k) = f(M)+\varphi(V^k)$. Нужно показать, что $\dim\varphi(V^k) = k$. Проверим, что если $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ — базис V^k, то $\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_k)$ будет базисом $\varphi(V^k)$. Из $\alpha_1\varphi(\vec{e}_1)+\ldots+\alpha_n\varphi(\vec{e}_k) = \vec{0}$ следует $\varphi(\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_k) = \vec{0} = \varphi(\vec{0})$, но φ инъективен, поэтому $\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_k = \vec{0}$, и $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Также нетрудно видеть, $\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_k)$ порождает $\varphi(V^k)$. □

Теор 3 (Основная теорема аффинной геометрии)**.** *Биективное отображение f аффинного пространства на себя является аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда*

1. *для любых точек A, B и C принадлежащих одной прямой, точки $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$ принадлежат одной прямой*

2. *f сохраняет простое отношение трех точек.*

Док-во. *Необходимость* условий следует из Свойства 1. Покажем *достаточность* этих условий.

Пусть дано f, которое *1) сохраняет принадлежность точек прямой* и *2) простое отношеное точек.* Зададим φ по правилу:

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$$

для любого $\overrightarrow{AB} \in V$.

Нужно проверить, что φ — линейный оператор и что $f(M+\vec{v}) = f(M) + \varphi(\vec{v})$.

Покажем $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

Возьмем $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Тогда $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$

Проверим $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\,\varphi(\vec{u})$.

Предположим $\lambda\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, то есть $(AB, C) = \lambda$. По условию *1)* точки $f(A), f(B), f(C)$ лежат на прямой и *2)* их простое отношение $(f(A)f(B), f(C)) = \lambda$. Получаем $\varphi(\lambda\vec{u}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(C)f(B)} = \lambda\,\varphi(\overrightarrow{CB}) = \lambda\,\varphi(\vec{u})$.

Проверим условие $f(M+\vec{v}) = f(M) + \varphi(\vec{v})$.

Возьмем $M+\vec{v} = N$, где $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. Получаем $f(M+\vec{v}) = f(N) = f(M) + \overrightarrow{f(M)f(N)} = f(M) + \varphi(\overrightarrow{MN}) = f(M) + \varphi(\vec{v})$.

Таким образом, введенное нами φ является линейным оператором, связанным с преобразованием f по правилу $f(M+\vec{v}) = f(M)+\varphi(\vec{v})$. И поэтому f — аффинное преобразование. □