1. k-мерная плоскость

1.1. Определение k-мерной плоскости

Пусть $\mathcal{A}$ — n-мерное аффинное пространство, связанное с линейным пространством W; пусть также V^k — подпространство в W размерности k.

Опр. *k-**мерной плоскостью** с* начальной точкой $M \in \mathcal{A}$ *и* направляющим пространством V^k *называется множество всех точек из $\mathcal{A}$, которые получаются откладыванием от точки M всевозможных векторов из V^k:*

$$\pi(M, V^k) = M + V^k = \{M + \vec{v} \mid \vec{v} \in V^k\}$$

Одномерные плоскости называются **прямыми**, $(n-1)$*-мерные плоскости* называют **гиперплоскости**.

Прим 1. *1. прямые и плоскости в евклидовой геометрии*

2. прямая на плоскости — гиперплоскость

Теор 1. *Пусть $\pi = M + V^k$ — k-мерная плоскость. Тогда для любой ее точки $M' \in \pi$ выполняется $\pi' = M' + V^k = \pi$.*

Док-во. Покажем $M' + V^k = M + V^k$.

"$\subseteq$") Пусть $N \in \pi' = M' + V^k$: $N = M' + \vec{v}$, где $\vec{v} \in V^k$. Но $M' \in M + V^k$: $M' = M + \vec{u}$, где $\vec{u} \in V^k$, поэтому $N = M' + \vec{v} = (M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v}) \in M + V^k = \pi$.

"$\supseteq$") Пусть $N \in \pi = M + V^k$: $N = M + \vec{v}$, где $\vec{v} \in V^k$. Из $M' = M + \vec{u}$: $M = M' + (-\vec{u})$, причем $-\vec{u} \in V^k$, след-но $N = M + \vec{v} = (M' + (-\vec{u})) + \vec{v} = M' + (-\vec{u} + \vec{v}) \in M' + V^k = \pi'$. □

1.2. Уравнение k-плоскости

Пусть в n-мерном пространстве зафиксирована аффинная система координат R и пусть $\pi = M + V^k$ — k-мерная плоскость

Теор 2. *Если $M(m_1, \dots, m_n)$ и $\vec{a}_1(a_{11}, \dots, \vec{a}_{1n}), \dots, \vec{a}_k(a_{k1}, \dots, \vec{a}_{kn})$ — базис пространства V^k, то для произвольной точки $X(x_1, \dots, x_n)$ аффинного пространства:*

$$X \in \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \dots + t_k a_{k1} + m_1 \\ x_2 = t_1 a_{21} + t_2 a_{22} + \dots + t_k a_{k2} + m_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = t_1 a_{1n} + t_2 a_{2n} + \dots + t_k a_{kn} + m_n \end{cases}$$

(параметрическое уравнение плоскости)

Док-во. $X \in M + V^k \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MV} \in V^k \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MX} = \sum t_i \vec{a}_i$ □

Теор 3. *Всякая k-мерная плоскость задается системой $n-k$ линейных уравнений:*

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n-k,1}x_1 + b_{n-k,2}x_2 + \dots + b_{n-k,n}x_n = c_{n-k} \end{cases}$$

(общее уравнение плоскости)

Ранг матрицы этой системы равен $n-k$.

Док-во. Пусть дана плоскость. Тогда для нее можно составить параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \dots + t_k a_{k1} + m_1 \\ x_2 = t_1 a_{21} + t_2 a_{22} + \dots + t_k a_{k2} + m_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = t_1 a_{1n} + t_2 a_{2n} + \dots + t_k a_{kn} + m_n \end{cases}$$

Если смотреть на него как на систему относительно t_i, то ранг матрицы системы равен k. Значит можно выбрать k уравнений и однозначно решить их относительно t_i. Будем для наглядности считать, что речь идет о первых k уравнениях.

Подставляя полученные t_i в остальные $n-k$ уравнений получим искомую систему. Ее матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-k,1} & b_{n-k,2} & \dots & b_{n-k,k} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обратно.

Пусть есть система с матрицей ранга $n-k$:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n-k,1}x_1 + b_{n-k,2}x_2 + \dots + b_{n-k,n}x_n = c_{n-k} \end{cases}$$

Как известно из алгебры, любое решение системы можно представить:

$$(\dots \text{частное решение} \dots) + (\dots \text{решение однородной сис} \dots)$$

Причем, множество решений соответствующей однородной системы $V = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid B\vec{x} = \vec{0}\}$ образует линейное пространство размерности $\dim V = n - (n-k) = k$.

То есть, множество решений записывается $X = p + V$, $\dim V = k$, и это k-мерная плоскость. □

1.3. Взаимное расположение плоскостей

Пусть α и β — плоскости аффинного пространства с направляющими пространствами V_α и V_β соответственно.

Опр. *Говорят, что*

- *плоскости α и β пересекаются, если у них есть общая точка*
- *плоскость α параллельна плоскости β, если $V_\alpha \subseteq V_\beta$*

- *плоскость α собственно параллельна плоскости β, если они не пересекаются и $V_\alpha \subseteq V_\beta$*
- *плоскость α частично параллельна плоскости β, если они не пересекаются и $V_\alpha \nsubseteq V_\beta, V_\beta \nsubseteq V_\alpha, V_\alpha \cap V_\beta \neq \vec{0}$*
- *плоскости α и β скрещиваются, если они не пересекаются и $V_\alpha \cap V_\beta = \vec{0}$*

Теор 4. *Плоскости $\alpha = M + V_\alpha$ и $\beta = N + V_\beta$ пересекаются тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MN} \in V_\alpha + V_\beta$.*

Док-во. Пусть плоскости пересекаются и P — общая точка. Тогда $P = M + \vec{u} = N + \vec{v}$, где $\vec{u} \in V_\alpha, \vec{v} \in V_\beta$. Но $\overrightarrow{PN} = -\vec{v}$ и $-\vec{v} \in V_\beta$, и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \vec{u} + (-\vec{v}) \in V_\alpha + V_\beta$.

Обратно.

Пуская $\overrightarrow{MN} \in V_\alpha + V_\beta$. Это означает $\overrightarrow{MN} = \vec{u} + \vec{v}$, где $\vec{u} \in V_\alpha, \vec{v} \in V_\beta$. Обозначим $P = M + \vec{u} \in M + V_\alpha = \alpha$ и покажем, что $P \in \beta$. Так $N = M + \overrightarrow{MN} = M + (\vec{u} + \vec{v}) = (M + \vec{u}) + \vec{v} = P + \vec{v}$, т.е. $\vec{v} = \overrightarrow{PN}$, а значит $\overrightarrow{NP} = -\vec{v} \in V_\beta$. Получаем, $P = N + (-\vec{v}) \in N + V_\beta = \beta$. Таким образом, P — общая точка. □

Теор 5. *Множество общих точек любой совокупности плоскостей (если оно не пусто) образует плоскость.*

Для определения взаимного расположения плоскостей используется

Лем 1 (Грассман). *Пусть V, W — подпространства некоторого конечномерного линейного пространства; тогда:*

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$