1. Аффинное пространство

1.1. Определение аффинного пространства

Пусть $\mathcal{A}$ — непустое множество "точек", V — n-мерное линейное пространство "векторов" над полем F.

Пусть задано отображение $\theta\colon \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, которое называется "откладыванием вектора от точки": будем обозначать $\theta(M, \vec{v}) = N$ через $M + \vec{v} = N$.

Опр. *Непустое множество $\mathcal{A}$ называется* ***аффинным пространством*** *над линейным пространством V, если задано отображение θ откладывания вектора от точки для которого выполнены условия:*

1. $(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$
2. $M + \vec{0} = M$
3. *для любых $M, N \in \mathcal{A}$ существует единственный $\vec{v} \in V$, что $M + \vec{v} = N$*

По 3 аксиоме любой паре точек $M, N \in \mathcal{A}$ соответствует *единственный* вектор с условием $M + \vec{v} = N$, поэтому будем обозначать его $\overrightarrow{MN}$.

Опр. *Размерностью аффинного пространства $\mathcal{A}$ над линейным пространством V называется размерность $n = \dim V$ линейного пространства V (т. е. число векторов в его базисе).*

След 1 (Свойства).

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$
3. *если $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$, то $-\vec{x} = \overrightarrow{NM}$*
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Док-во. 3. Пусть $\vec{x} = \overrightarrow{MN}$, т.е. $M + \vec{x} = N$, но $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$, таким образом, $N + (-\vec{x}) = (M + \vec{x}) + (-\vec{x}) \overset{1.}{=} M + (\vec{x} + (-\vec{x})) \overset{2.}{=} M + \vec{0} = M$, получаем $-\vec{x} = \overrightarrow{NM}$ по аксиоме 3. $\square$

Прим 1. 1. *Обычная плоскость из точек*

2. *Пусть* V *— линейное пространство; возьмем* $\mathcal{A} = V$ *и* $\theta(\overrightarrow{M}, \vec{v}) = \overrightarrow{M} + \vec{v}$

3. *Возьмем* $\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_n, 1) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ *и линейное пространство* $V = \{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ *над* $\mathbb{R}$ *с покомпонентными сложением и умножением на число; зададим* $\theta(M, \vec{v}) = (x_1, \dots, x_n, 1) + (y_1, \dots, y_n, 0) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, 1 + 0)$

Опр. ***Аффинной системой координат*** *называется всякая пара* $R = (O, \delta)$*, состоящая из точки* $O \in \mathcal{A}$ *и базиса* $\delta = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *линейного пространства* V*:*

$$R(O, \delta)$$

Опр. ***Координатами*** *точки* $M \in \mathcal{A}$ *в афф. сис. коорд.* $R(O, \delta)$ *называют координаты вектора* $\overrightarrow{OM}$ *в базисе* δ*:*

$$M(x_1, \dots, x_n)_R \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

След 2. *Если* $A(a_1, \dots, a_n)_R$*,* $B(b_1, \dots, b_n)_R$*, то* $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_\delta$*.*

Теор 1 (формулы преобразования координат)**.** *Пусть* $R(O, \delta)$ *и* $R'(O', \delta')$ *— аффинные системы координат афф. пространства* $\mathcal{A}$*, точка* O' *имеет координаты* $O'(a_1, \dots, a_n)_R$*,* C *— матрица перехода от базиса* δ *к* δ'*. Тогда для произвольной точки* M *с координатами* $M(x_1, \dots, x_n)_R$*,* $M(x_1', \dots, x_n')_{R'}$ *имеют место формулы:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Док-во. Запишем векторное равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$,
$x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \ = \ a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n \ + \ x_1'\vec{e}_1' + \dots + x_n'\vec{e}_n'$,
и с помощью матриц, где воспользуемся ассоциативностью умножения,

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\vec{e}'_1 & \cdots & \vec{e}'_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n\end{pmatrix} C \begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} + C \begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}\right)$$

$\square$