8. Поверхности второго порядка

Поверхностью называется множество всех точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют некоторому уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Поверхность называется **алгебраической**, если $F(x, y, z)$ есть многочлен. Тогда **порядком** такой поверхности называют степень этого многочлена.

Все поверхности первого порядка — плоскости. Произвольная поверхность второго порядка имеет уравнение $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$, где a_{ij} — числа, причем не все a_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ равны нулю.

Чтобы изучать такие поверхности можно сводить эту задачу к задаче изучения кривых второго порядка на плоскости.

Теор 1. *Пусть в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ поверхность γ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Линия пересечения поверхности γ с плоскостью $z = h$ имеет уравнение $F(x, y, h) = 0$ в системе координат $O'\,\vec{i}\,\vec{j}$, где $O'(0, 0, h)$.*

Док-во. Допустим, что существует точка пересечения $M(x_1, y_1, z_1)$. Тогда $z_1 = h$ и $F(x_1, y_1, h) = 0$. Так как $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + h\vec{k} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = h\vec{k} + \overrightarrow{O'M}$, то в $O'\,\vec{i}\,\vec{j}$ точка M имеет координаты (x_1, y_1), которые удовлетворяют указанному уравнению.

Обратно. Если $M(x_1, y_1)$ в $O'\,\vec{i}\,\vec{j}$ и $F(x_1, y_1, h) = 0$, то, аналогично, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = h\vec{k} + x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и M в $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ имеет координаты (x_1, y_1, h), которые удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$. □

След 1. *Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью есть кривая второго порядка на этой плоскости.*

8.1. Поверхность вращения

Пусть фиксирована некоторая прямая d (ось вращения). Поверхность, которая вместе с каждой своей точкой M содержит всю окружность, проходящую через M в плоскости, перпендикулярной d, с центром на прямой d, называется **поверхностью вращения**.

Теор 2. *В декартовой системе координат уравнение* $x^2+y^2=f^2(z)$ *есть уравнение поверхности вращения с осью вращения* $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$, *образованной линией* $\begin{cases} x=f(z), \\ y=0 \end{cases}$.

Док-во. Пусть $M(x_1,y_1,z_1)$ принадлежит поверхности. Тогда в плоскости $z=z_1$ точка M принадлежит окружности радиуса $|f(z_1)|$, центр которой $O'(0,0,z_1)$. Поэтому $|\overline{O'M}|=|f(z_1)|$, т.е. $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=|f(z_1)|$ и $x_1^2+y_1^2=f^2(z_1)$.

Обратно. Если M удовлетворяет уравнению, $x_1^2+y_1^2=f^2(z_1)$, то $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=|f(z_1)|$, а значит расстояние $|\overline{O'M}|=|f(z_1)|$, т.е. M принадлежит окружности радиуса $|f(z_1)|$ в плоскости $z=z_1$. □

8.2. Цилиндрические поверхности

Пусть дан ненулевой вектор $\overrightarrow{p}$. Поверхность, которая вместе с каждой своей точкой M содержит прямую (образующая), проходящую через M параллельно $\overrightarrow{p}$, называется **цилиндрической поверхностью**.

Теор 3. *В декартовой системе координат уравнение* $F(x,y)=0$ *есть уравнение цилиндрической поверхности, образованной линией* $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$, *с образующими, параллельными* $\overrightarrow{k}(0,0,1)$.

Док-во. Пусть $M(x_1,z_1,y_1)$ принадлежит поверхности. Тогда прямая через точку M, параллельная $\overrightarrow{k}$, содержится в поверхности. Эта прямая пересекает плоскость $z=0$ в точке $M_0(x_1,y_1,0)$, которая должна удовлетворять $F(x,y)=0$, что и требовалось.

Обратно. Пусть M удовлетворяет уравнению, $F(x_1,y_1)=0$. Прямая через точку M, параллельная $\overrightarrow{k}$, пересекает плоскость $z=0$ в точке $M_0(x_1,y_1,0)$.

Но координаты M_0 удовлетворяют уравнению $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ образующей линии. □

8.3. Конические поверхности

Пусть дана точка M_0. Поверхность, которая с каждой своей точкой M, отличной M_0, содержит всю прямую M_0M, называется **конической поверхностью** с вершиной M_0.

Теор 4. *В декартовой системе координат уравнение* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ *есть уравнение конической поверхности с вершиной* $M_0(0,0,0)$*, образованной линией* $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c\neq 0 \end{cases}$.

Док-во. Пусть $M(x_1,y_1,z_1)\neq M_0$ принадлежит поверхности. Прямая M_0M пересечет плоскость $z=c$ в точке $M_1(x_2,y_2,c)$, которая будет удовлетворять $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Векторы $\overrightarrow{M_0M}(x_1,y_1,z_1)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_2,y_2,)$ коллинеарны и отличны от нулевого. Поэтому $x_2=tx_1$, $y_2=ty_1$, $c=tz_1$ для некоторого $t\neq 0$. Следовательно, $z_1\neq 0$ и $t=\frac{c}{z_1}$. Отсюда вычислим $x_2=\frac{cx_1}{z_1}$, $y_2=\frac{cy_1}{z_1}$ и подставим в $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Получаем нужное уравнение.

Обратно. Пусть $M(x_1,y_1,z_1)$ удовлетворяет уравнению. Если $z_1\neq 0$, т.е. M не лежит в плоскости $z=0$, то прямая M_0M пересекает плоскость $z=c$ в некоторой точке $M_1(x_2,y_2,c)$. Снова $\overrightarrow{M_0M}(x_1,y_1,z_1)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_2,y_2,)$ коллинеарны. Поэтому $x_2=tx_1$, $y_2=ty_1$, $c=tz_1$ для некоторого $t\neq 0$ и $x_2=\frac{cx_1}{z_1}$, $y_2=\frac{cy_1}{z_1}$. Отсюда $M_1\left(\frac{cx_1}{z_1},\frac{cy_1}{z_1},c\right)$ удовлетворяет $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c \end{cases}$ и прямая M_0M_1 содержится в конусе, а значит и M тоже. □

8.4. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат удовлетворяет уравнению $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

8.5. Гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

8.6. Параболоид

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат удовлетворяет уравнению $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$
Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z.$