7. Кривые второго порядка

Произвольная линия второго порядка имеет уравнение

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

где a_{ij} — числа, причем не все a_{ii} $(i = 1, 2)$ равны нулю.

Теор 1. *Для любой линии второго порядка существует декартова система координат, в которой ее уравнение имеет один из следующих видов:*

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ *(эллипс)*
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ *(мнимый эллипс)*
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ *(пара мнимых пересекающихся прямых)*
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0, b > 0)$ *(гипербола)*
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ *(пара пересекающихся прямых)*
6. $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ *(парабола)*
7. $y^2 - a^2 = 0$, $(a > 0)$ *(пара параллельных прямых)*
8. $y^2 + a^2 = 0$, $(a > 0)$ *(пара мнимых параллельных прямых)*
9. $y^2 = 0$ *(пара совпадающих прямых)*

Док-во. Перейдем к новой декартовой системе координат, в которой коэффициент при xy станет равным нулю (если он и так не равен нулю).

Формулы поворота имеют вид: $\begin{cases} x = \cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y' \\ y = \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y' \end{cases}.$

После преобразования уравнение примет вид:
$F(x', y') = a_{11}(\cos\varphi\ x' - \sin\varphi\ y')^2 + 2a_{12}(\cos\varphi\ x' - \sin\varphi\ y')(\sin\varphi\ x' + \cos\varphi\ y') + a_{22}(\sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y')^2 + \ldots$.

Коэффициент при $2x'y'$ равен $-a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi = (a_{22}-a_{11})\dfrac{\sin 2\varphi}{2} + a_{12}\cos 2\varphi$.

Приравняем его к нулю, получим $\dfrac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$. Так как предполагалось $a_{12}\neq 0$, то возьмем $\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}\right)$.

Осуществив переход к новой системе координат получим уравнение: $F(x',y') = b_{11}(x')^2 + b_{22}(y')^2 + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + b_{00} = 0$.

По возможности исключим из уравнения $F(x',y') = 0$ слагаемые с y и/или x выделяя квадраты.

Если $b_{11}, b_{22}\neq 0$, тогда $F(x',y') = b_{11}(x')^2 + b_{22}(y')^2 + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + b_{00} = b_{11}\left(x' + \dfrac{b_{10}}{b_{11}}\right)^2 + b_{22}\left(y' + \dfrac{b_{20}}{b_{22}}\right)^2 + \left(b_{00} - \dfrac{b_{10}^2}{b_{11}} - \dfrac{b_{20}^2}{b_{22}}\right) = b_{11}(x'')^2 + b_{20}(y'')^2 + c$, где $x'' = x' + \dfrac{b_{10}}{b_{11}}$, $y'' = y' + \dfrac{b_{20}}{b_{22}}$.

Таким образом, для перехода к $F(x'',y'') = b_{11}(x'')^2 + b_{20}(y'')^2 + c$ достаточно перейти к новой системе координат по формулам:

$$\begin{cases} x' = x'' - \dfrac{b_{10}}{b_{11}} \\ y' = y'' - \dfrac{b_{20}}{b_{22}} \end{cases}.$$

Если $b_{11} = 0$, $b_{22}\neq 0$, то получаем уравнение $F(x'',y'') = b_{22}(y'')^2 + 2b_{10}x''$ когда $b_{10}\neq 0$ и уравнение $F(x'',y'') = b_{22}(y'')^2 + c$ когда $b_{10} = 0$:

допустим $b_{10}\neq 0$, тогда $F(x',y') = b_{22}(y')^2 + 2b_{10}x' + 2b_{20}y' + b_{00} = b_{22}\left(y' + \dfrac{b_{20}}{b_{22}}\right) + 2b_{10}x' + \left(b_{00} - \dfrac{b_{20}^2}{b_{22}}\right) = b_{22}(y'')^2 + 2b_{10}x''$, где $x'' = x' + \dfrac{1}{2b_{10}}\left(b_{00} - \dfrac{b_{20}^2}{b_{22}}\right)$.

Если $b_{11}\neq 0$, $b_{22} = 0$, то перейдем к системе координат, в которой координаты поменяются местами и см. предыдущий случай.

Получается, что от уравнения $F(x',y') = 0$ можно перейти к одному из следующих:

1. $F(x'',y'') = b_{11}(x'')^2 + b_{20}(y'')^2 + c$,
2. $F(x'',y'') = b_{22}(y'')^2 + 2b_{10}x''$,

3. $F(x'', y'') = b_{22}(y'')^2 + c$

в некоторой новой декартовой системе координат.

Так как умножение любого уравнения на число отличное от нуля не меняет множества его решений, то при умножении уравнения, задающего линию в некоторой аффинной системе координат, переходим к уравнению, задающему ту же линию.

От получившихся уравнений переходим к одному из нужных видов с помощью умножения (деления) на число или замены системы координат $x'' = y''', y'' = x'''$. □

Уравнение линии второго порядка, которое имеет вид уравнений Теоремы 1, называется канонически уравнением.

Уравнение (5) задает множество точек, которое представляет из себя две пересекающиеся прямые $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$.

Уравнение (7) задает множество точек, которое представляет из себя две параллельные прямые $y^2 - a^2 = (y-a)(y+a) = 0$

Уравнение (9) задает множество точек прямой $y = 0$.

Уравнения (2), (8) не имеют точек, удовлетворяющих этим уравнениям (с действительными координатами), а (3) удовлетворяет единственная точка.