6. Кривые второго порядка

6.1. Эллипс

Опр. ***Эллипс*** *— это множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна $2a$ для данного $a > 0$, причем $2a > |\overline{F_1F_2}| = 2c$.*

Составим уравнение произвольного эллипса.

Введем систему координат с центром O в середине отрезка $\overline{F_1F_2}$ и ортонормированным базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ таким, что $\overrightarrow{e_1}$ сонаправлен с $\overrightarrow{OF_2}$.

Тогда в $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ и для всякой точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a > 2c$, и $a > c$. Получаем, что $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, возводя в квадрат, $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$, снова возводя в квадрат, $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Обозначим $b^2 = a^2 - c^2 > 0$ так как $a > c$. Получаем $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\textbf{каноническое уравнение } \text{эллипса}) \qquad (1)$$

Покажем, что любая точка удовлетворяющая (1), принадлежит нашему эллипсу. Пусть $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению. Выразим из него $y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)(a^2 - c^2)$ и подставим в $|\overline{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)(a^2 - c^2)} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}} = \sqrt{2xc + a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2}} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$ и аналогично $|\overline{F_2M}| = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$. Но $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ из уравнения, поэтому $|x| \leqslant a$, и $0 \leqslant \frac{c}{a} < 1$ из определения. Следовательно модули можно снять и получить равенство $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$, т.е. M принадлежит эллипсу по определению.

Таким образом, доказана

Теор 1. *Для любого эллипса существует аффинная система координат, в которой он имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ для некоторых $a \geqslant b > 0$.*

Если $F_1 = F_2$, то $c = 0$, $a = b$ и уравнение такого эллипса $x^2 + y^2 = a^2$ есть уравнение окружности.

Эллипс симметричен относительно начала координат и осей координат, т.к. из принадлежности ему точки $M(x, y)$ следует, что точка $N(\pm x, \pm y)$ также ему принадлежит.

Все точки располагаются в области $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, т.к. $x^2 \leqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2$. Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(-b, 0)$ называются вершинами, а a и b — большой и малой полуосями.

Опр. *Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется* ***эксцентриситетом*** *эллипса (1).*

Опр. *Прямая, перпендикулярная прямой F_1F_2 (при условии $F_1 \neq F_2$) и отстоящая от центра эллипса на $d = \dfrac{a}{\varepsilon}$, называется* ***директрисой*** *эллипса (1).*

Уравнения директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

Теор 2. *Для любой точки M эллипса (1) $\dfrac{|\overline{F_1M}|}{|\overline{MN_1}|} = \dfrac{|\overline{F_2M}|}{|\overline{MN_2}|} = \varepsilon$, где MN_1 и MN_2 — перпендикуляры из M к директрисам $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ соответственно.*

Док-во. $|F_1M| = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right| = |a + \varepsilon x|$, $|MN_1| = \sqrt{\left(-\dfrac{a}{\varepsilon} - x\right)^2} = \left|\dfrac{a}{\varepsilon} + x\right| = \dfrac{|a + \varepsilon x|}{\varepsilon}$, т.е. $\dfrac{|\overline{F_1M}|}{|\overline{MN_1}|} = \varepsilon$. Аналогично со вторым. □

6.2. Гипербола

Опр. ***Гипербола*** *— это множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 постоянно и равно $2a$ для данного $a > 0$, причем $2a < |\overline{F_1F_2}| = 2c$.*

Составим уравнение произвольной гиперболы.

Введем систему координат с центром O в середине отрезка $\overline{F_1F_2}$ и ортонормированным базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ таким, что $\overrightarrow{e_1}$ сонаправлен с $\overrightarrow{OF_2}$.

Тогда в $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ имеем $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ и для всякой точки $M(x,y)$, принадлежащей гиперболе, $||\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|| = 2a < 2c$, и $a < c$. Отсюда получаем $|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$, или $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, возводя в квадрат, $\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$, снова возводя в квадрат, $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$. Обозначим $b^2 = c^2 - a^2 > 0$ так как $a < c$. Получаем $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(\textbf{каноническое уравнение} гиперболы)} \tag{2}$$

Покажем, что любая точка удовлетворяющая (2), принадлежит нашей гиперболе. Пусть $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению. Выразим из него $y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)(c^2 - a^2)$ и подставим в $|\overline{F_1M}| = \ldots = \left|\frac{c}{a}x + a\right|$ и аналогично $|\overline{F_2M}| = \left|\frac{c}{a}x - a\right|$. Но $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$, поэтому $|x| \geqslant a$, а это означает $x \geqslant a$ или $x \leqslant -a$. Заметим еще, что $1 < \frac{c}{a}$.

Если $x \geqslant a$, то $|F_1M| = \frac{c}{a}x + a$, $|F_2M| = \frac{c}{a}x - a$; если $x \leqslant -a$, то $|F_1M| = -\frac{c}{a}x - a$, $|F_2M| = -\frac{c}{a}x + a$. В обоих случаях $||\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|| = 2a$ и M по определению принадлежит гиперболе.

Теор 3. *Для любой гиперболы существует аффинная система координат, в которой она имеет уравнение* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *для некоторых* $a > 0$ *и* $b > 0$.

Гипербола симметрична относительно начала координат и осей координат, т.к. из принадлежности ей точки $M(x,y)$ следует, что точка $N(\pm x, \pm y)$ также ей принадлежит.

Все точки располагаются в области $x \leqslant -a$, $a \leqslant x$, т.к. $x^2 \geqslant a^2$. Точки $(a,0)$, $(-a,0)$ называются вершинами, а a и b — действительной и мнимой полуосями.

Возьмем произвольно прямую $y = kx$ с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha$ и подставим этот y в (2) чтобы найти ее пересечения с гиперболой (2): $x^2(b^2 - k^2a^2) = a^2b^2$. Получившееся уравнение разрешимо при $b^2 - k^2a^2 > 0$, т.е. $|k| < \frac{b}{a}$, или $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$.

Покажем, что $y = \pm\frac{b}{a}x$ — асимптоты: $y_2 - y_1 = \frac{b}{a}x - \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =^*$ домножим верх и низ на $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, получим $^* = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Опр. *Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется* ***эксцентриситетом*** *гиперболы (2).*

Опр. *Прямая, перпендикулярная прямой F_1F_2 и отстоящая от центра гиперболы на $d = \frac{a}{\varepsilon}$, называется* ***директрисой*** *гиперболы (2).*

Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$.

Теор 4. *Для любой точки M гиперболы (2) $\frac{|\overline{F_1M}|}{|\overline{MN_1}|} = \frac{|\overline{F_2M}|}{|\overline{MN_2}|} = \varepsilon$, где MN_1 и MN_2 — перпендикуляры из M к директрисам $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$ соответственно.*

6.3. Парабола

Опр. ***Парабола*** *— это множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки F равно расстоянию ее до данной прямой d, причем $F \notin d$.*

Составим уравнение произвольной параболы.

Введем систему координат с центром O в середине перпендикуляра FD из F на d и ортонормированным базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, где $\overrightarrow{e_1}$ сонаправлен с $\overrightarrow{OF}$.

Тогда в $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, обозначив $p = |\overline{FD}|$, имеем $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, d: $x = -\frac{p}{2}$. Для всякой точки $M(x, y)$, принадлежащей параболе, $|\overline{MF}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, а расстояние M до d равно $\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$. Приравняем и возведем в квадрат,

$$y^2 = 2px \qquad (\textbf{каноническое уравнение} \text{ параболы}) \tag{3}$$

Покажем, что любая точка удовлетворяющая (3), принадлежит нашей гиперболе. Допустим $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению. Подставим y^2 из (3) в

$|\overline{MF}| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{2^2} + 2px} = \left|x+\frac{p}{2}\right|$, а это есть расстояние от M до d. Показали, что M принадлежит параболе по определению.

Теор 5. *Для любой параболы существует аффинная система координат, в которой она имеет уравнение $y^2 = 2px$ для некоторого $p > 0$.*

Парабола симметрична относительно оси OF, т.к. из принадлежности ей точки $M(x, y)$ следует, что точка $N(x, \pm y)$ также ей принадлежит.

Все точки располагаются в области $x \geqslant 0$. Точка $O(0, 0)$ называется вершиной.

6.4. Уравнение в полярных координатах

Обозначим D ортогональную проекцию фокуса F на директрису d. Введем полярную систему координат $F\vec{i}$, в которой F – фокус, а $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DF}|}$.

Пусть точка $M(\rho, \varphi)$ принадлежит линии. По директориальному свойству $\rho = |\overline{FM}| = \varepsilon|\overline{NM}|$, где N – ортогональная проекция M на директрису. Но $|\overrightarrow{NM}| = |\overrightarrow{DM'}|$, где M' – ортогональная проекция M на прямую DF, и $|\overrightarrow{DM'}| = \overrightarrow{DM}\vec{i}$, т.к. $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DM'} + \overrightarrow{M'M}$ и $\overrightarrow{DM'}\overrightarrow{M'M} = 0$. Поэтому $\rho = \varepsilon\overrightarrow{DM}\vec{i} = \varepsilon(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM})\vec{i} = \varepsilon(|\overrightarrow{DF}| + \rho\cos\varphi)$. Обозначим число $p = \varepsilon|\overrightarrow{DF}| = \varepsilon\left|\frac{a}{\varepsilon} - c\right| = |a - \varepsilon c| = \frac{|a^2 - c^2|}{a} = \frac{b^2}{a}$, которое называется фокальным параметром и не зависит от взятой точки, получим

$$\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = p.$$