5. Уравнения плоскости, прямой в пространстве

5.1. Плоскость в пространстве

Пусть дана плоскость α в пространстве, в котором фиксирована некоторая аффинная система координат $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.

На плоскости любые два неколлинеарных вектора образуют базис множества всех векторов плоскости, а значит и множества всех векторов пространства, параллельных этой плоскости. Т.о. любой вектор, параллельный этой плоскости, является линейной комбинацией векторов базиса.

5.2. Уравнение плоскости

Возьмем некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и пару ненулевые неколлинеарные векторов $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$, параллельных α. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ называется **направляющими** для α.

Теор 1. *Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1 t_1 + b_1 t_2 \\ y - y_0 = a_2 t_1 + b_2 t_2 \\ z - z_0 = a_3 t_1 + b_3 t_2 \end{cases} \qquad \textit{(\textbf{параметрические уравнения} плоскости)} \tag{1}$$

для некоторого $t \in \mathbb{R}$.

Док-во. Для любой точки $M(x, y, z) \in \alpha$ вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен α. Поэтому векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ компланарны и по Теореме 1 они линейно зависимы, а значит $\overrightarrow{M_0M} = t_1\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b}$ для некоторых t_1, t_2, т.е. верны (1).

Допустим верны равенства (1). Тогда $\overrightarrow{M_0M} = t_1\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b}$, а значит векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ компланарны по Теореме 1. Поэтому $M \in \alpha$. □

Получим некоторые другие виды уравнений.

(1) $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Действительно, для любой точки $M(x, y, z) \in \alpha$ разрешима относительно t_1, t_2 система (1), поэтому ранг расширенной матрицы такой системы меньше 3, что и означает (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): такое равенство означает, что существует ненулевое решение α, t_1, t_2 системы (эквивалентной равенству) $\alpha\overrightarrow{M_0M} + t_1\vec{a} + t_2\vec{b} = 0$, т.е. векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, отсюда $M \in \alpha$.

(2) $\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$, где A, B, C — соответствующие алгебраические дополнения, что можно записать так

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{(\textbf{общее уравнение} плоскости)} \tag{3}$$

с $D = (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)$, причем A, B, C одновременно не могут быть равны нулю, т.к. $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Скажем, $A \neq 0$, тогда общее решение (3) можно записать $x = \frac{-By-Cz-D}{A}$, $y = t_1$, $z = t_2$. Составим уравнение плоскости (2), взяв точку $M_0(-\frac{D}{A}, 0, 0)$, которая удовлетворяет (3), а в качестве (линейно независимых) направляющих векторов возьмем пару решений уравнения $Ax+By+Cz = 0$ (см. Утв. 2): $\vec{a}(-\frac{B}{A}, 1, 0)$ и $\vec{b}(-\frac{C}{A}, 0, 1)$. Получаем $\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, что можно переписать, разложив по строке, $x + \frac{D}{A} + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z = 0$ и домножить на $A \neq 0$. Видим, что составленное уравнение эквивалентно изначально взятому (3). Аналогично, если $B \neq 0$ или $C \neq 0$ получаем уравнения, эквивалентные уравнению (2).

Если точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ принадлежат α и не лежат на одной прямой, то возьмем в качестве направляющих векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, а точку M_1 — в качестве точки, принадлежащей α, и составим уравнение (2):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(уравнение плоскости через три точки)} \tag{4}$$

Если в декартовой системе координат задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и вектор $\vec{n}(A, B, C) \neq \vec{0}$, перпендикулярный плоскости α, то $\vec{n}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_0M}$ для любой точки $M \in \alpha$. Поэтому для всякой точки $M \in \alpha$ можно записать $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad \text{(уравнение по точке и нормальному вектору)} \quad (5)$$

Но это уравнение уже было получено выше из (2), а из него получалось (3). Так как из общего уравнения (3) можно очевидно получить уравнение вида (5), подставив координаты некоторой точки $M_0 \in \alpha$ и вычислив D, то отсюда получаем смысл коэффициентов общего уравнения плоскости:

Утв 1. *В декартовой системе координат вектор* $\vec{n}(A, B, C)$ *перпендикулярен плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$.

Ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости называется **нормальным вектором** данной плоскости.

Утв 2. *Вектор* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ *параллелен плоскости* $Ax+By+Cz+D = 0$ *тогда и только тогда, когда* $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$.

Док-во. Пусть $\vec{a}$ параллелен плоскости. Отложим его от произвольной точки плоскости: имеем $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ для некоторых точек $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ принадлежащих плоскости. Координаты удовлетворяют уравнениям, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$. Вычитая, получаем $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) + D = 0$. Но $x_2 - x_1 = a_1$, $y_2 - y_1 = a_2$ и $z_2 - z_1 = a_3$.

Обратно. Отложив $\vec{a}$ от произвольной точки $A(x_1, y_1, z_1)$ на плоскости, получим точку $B(x_2, y_2, z_2)$. По условию, координаты $\vec{a}$ удовлетворяют уравнению, $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)+D = 0$. Но $Ax_1+By_1+Cz_1+D = 0$, т.к. A принадлежит плоскости. Сложив равенства видим, что B принадлежит плоскости, т.е. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ параллелен плоскости. □

5.3. Взаимное расположение плоскостей

Множество общих точек плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ – решения системы $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Возможны следующие случаи:

1. нет решений — плоскости параллельны:

   $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{что значит}$$

   $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{и}$$

   $$\text{один из } \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} \quad \text{отличен от нуля,}$$

   поэтому $A_1B_2 = A_2B_1, \quad A_1C_2 = A_2C_1, \quad B_1C_2 = B_2C_1$,

   среди A_1, B_1, C_1 есть отличный от нуля, скажем, $A_1 \neq 0$, тогда $A_2 = \lambda A_1$ для некоторого λ и $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, поэтому

   $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \quad D_2 \neq \lambda D_1$;

2. бесконечно много решений, ранг равен 1 — плоскости совпадают:

   $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{что значит}$$

   $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \quad D_2 = \lambda D_1$;

3. бесконечно много решений, ранг равен 2 — плоскости пересекаются по прямой:

   $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{что означает}$$

   не существует такого числа λ чтобы выполнялись равенства $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$ и $C_2 = \lambda C_1$.

5.4. Расстояние от точки до плоскости

Опр. ***Расстоянием от точки до плоскости*** *называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.*

Опр. *Вектор называется* ***перпендикулярным*** *плоскости, если он перпендикулярен любой прямой на данной плоскости.*

Утв 3. *Расстояние от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, заданных в декартовой системе координат, вычисляется по формуле*

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Док-во. Пусть M — точка, не лежащая на плоскости $\alpha: Ax+By+Cz+D = 0$, а M_0M — перпендикуляр из M к α, где $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Тогда для нормального вектора $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ имеем $\overrightarrow{n}\overrightarrow{M_0M} = |\overrightarrow{n}||\overrightarrow{M_0M}|\cos(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)$. Выражаем $|\overrightarrow{M_0M}| = \pm\frac{Ax_1+By_1+Cz_1-Ax_0-By_0-Cz_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, отсюда расстояние равно $\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. □

5.5. Угол между плоскостями

Опр. *Углом между двумя пересекающимися плоскостями σ_1 и σ_2 называется угол между прямыми, образованными пересечением плоскостей σ_1 и σ_2 с плоскостью, перпендикулярной прямой пересечения σ_1 и σ_2.*

Величина угла между пересекающимися плоскостями σ_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и σ_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ может быть вычислена через угол между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$.

Пусть прямые $l_1 \subset \sigma_1$ и $l_2 \subset \sigma_2$ образуют линейный угол α, который нужно найти, и лежат в плоскости γ, перпендикулярной σ_1 и σ_2. Тогда вектор $\overrightarrow{n_1}$ перпендикулярен l_1 и $\overrightarrow{n_2}$ перпендикулярен l_2, причем $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ параллельны γ. Угол $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ равен углу между направляющими векторами прямых l_1 и l_2 (рассматриваем их как прямые на плоскости γ). Так же как и для угла между прямыми, если $\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) > 0$, то это $\cos\alpha$, а если $\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) < 0$, то это $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$. На интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция $\cos$ обратима, поэтому можно однозначно найти значение угла α.

Если уравнения заданы в декартовой системе координат, то угол между нормальными векторами вычисляется через скалярное произведение, т.е. $\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, из этого получаем значение α.

5.6. Уравнение прямой в пространстве

Пусть дана прямая l в пространстве, на которой фиксирована некоторая аффинная система координат $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.

Возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и ненулевой вектор $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$, параллельный l.

Теор 2. *Точка $M(x, y, z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \\ z - z_0 = a_3 t \end{cases} \quad \textit{(}\textbf{\textit{параметрические уравнения}}\textit{ прямой)} \tag{6}$$

для некоторого $t \in \mathbb{R}$.

Если $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, то (6) $\Rightarrow$

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (\textbf{каноническое уравнение} \text{ прямой}) \tag{7}$$

если $a_1 = 0, \quad a_2 = 0 \quad$ или $\quad a_3 = 0$, то соответственно
$x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0 \quad$ или $\quad z - z_0 = 0$.

Выражая в одном из уравнений (6) параметр t и подставляя в другие два уравнения, получаем:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(\textbf{общие уравнения} \text{ прямой}) \tag{8}$$

где ранг матрицы системы (8) равен 2.

На уравнения (8) можно смотреть как на уравнение прямой, являющейся пересечением двух плоскостей.

Коэффициенты в уравнениях (8) являются координатами направляющих векторов плоскости, которая перпендикулярна данной прямой.

Утв 4. *Если прямая задана уравнениями* $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$*, то вектор* $\overrightarrow{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$ *параллелен данной прямой.*

Док-во. По Утверждению 2 вектор $\overrightarrow{p}$ параллелен обеим плоскостям, задаваемым уравнениями. Поэтому он параллелен и прямой, по которой эти плоскости пересекаются. □

5.7. Взаимное расположение прямых

Пусть даны две прямые l_1 и l_2 в пространстве. Возьмем точки $M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$ и направляющие векторы $\overrightarrow{a_1}$ для прямой l_1, $\overrightarrow{a_2}$ для прямой l_2.

Две прямые l_1 и l_2 в пространстве могут совпадать, пересекаться, быть параллельными, скрещиваться. В первых трех случаях l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, в последнем — не лежат.

Определить взаимное расположение прямых l_1 и l_2 можно рассматривая векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$:

1. если векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны (прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости) и:

   (a) векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ попарно коллинеарны, то **прямые совпадают**;

   (b) векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{a_1}$ не коллинеарны, то **прямые параллельны**;

   (c) векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ не коллинеарны, то **прямые пересекаются**;

2. если векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны, то прямые не лежат в одной плоскости, поэтому они **скрещиваются**.

5.8. Расстояние от точки до прямой

Утв 5. *Расстояние от точки M до прямой, заданной точкой M_0 и направляющим вектором $\overrightarrow{a}$, вычисляется по формуле*

$$\frac{|[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{a}]|}{|\overrightarrow{a}|}.$$

Док-во. Пусть P — точка пересечения перпендикуляра из M к прямой l, $P \in l$. Если $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ параллелен l, то площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{a}$ можно вычислить как $|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{a}|$ или как $|[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{a}]|$, отсюда искомое расстояние равно $|\overrightarrow{PM}| = \frac{|[\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{a}]|}{|\overrightarrow{a}|}$. □

5.9. Углы, расстояния

Опр. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между проходящими через общую точку прямыми, параллельными данным.*

Опр. *Углом между прямой и плоскостью называется угол между данной прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость, если прямая не перпендикулярна плоскости, и $\frac{\pi}{2}$, если прямая перпендикулярна плоскости.*

Утв 6. *Для угла φ между двумя прямыми с направляющими векторами $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданными в декартовой системе координат,*

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Док-во. Рассуждения аналогичны тем, что сделаны для угла между прямыми на плоскости. □

Утв 7. *Для угла φ между прямой с направляющим вектором $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, заданными в декартовой системе координат,*

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Док-во. Нужный угол φ можно найти через угол между $\overrightarrow{a}$ и нормальным вектором плоскости $\overrightarrow{n}(A, B, C)$.

Косинус угла между данной прямой и прямой, перпендикулярной данной плоскости, вычисляется $\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$ согласно Утверждению 6, но этот угол есть $\frac{\pi}{2} - \varphi$. По формуле приведения получаем нужное равенство.

Если прямая перпендикулярная плоскости, то синус искомого угла φ должен быть равен $\sin\frac{\pi}{2} = 0$. Так как в правой части доказываемой формулы стоит косинус угла между данной прямой и прямой, перпендикулярной данной плоскости, который равен $\cos 0 = 1$, то и в этом случае формула выполняется. □

Утв 8. *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми l_1, заданной направляющим вектором $\overrightarrow{a_1}$ и точкой M_1, и l_2, с направляющим вектором $\overrightarrow{a_2}$ и точкой M_2, равно*

$$\frac{|\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|}.$$

Док-во. Векторное произведение $[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]$ перпендикулярно $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, поэтому оно коллинеарно с общим перпендикуляром к прямым l_1 и l_2, длина которого равна расстоянию между прямыми.

Пусть $\overline{AB}$ — общий перпендикуляр к l_1 и l_2, где $A \in l_1$, $B \in l_2$. Как сказали, $\overrightarrow{AB} = \gamma[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]$ для некоторого числа γ. Так как $\overrightarrow{AM_1}$ коллинеарен $\overrightarrow{a_1}$, а $\overrightarrow{M_2B}$ коллинеарен $\overrightarrow{a_2}$, то также можно записать $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \beta\overrightarrow{a_2}$ для некоторых чисел α, β. Теперь домножим скалярно на $[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]$ и получим $[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]\overrightarrow{AB} = \gamma[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]^2 = \alpha \underbrace{\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{a_1}}_{=0} + \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{M_1M_2} + \beta \underbrace{\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{a_2}}_{=0} = \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{M_1M_2}$.

Учитывая, что искомая длина равна $|\overrightarrow{AB}| = |\gamma||[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|$, выражаем из последнего равенства $|\overrightarrow{AB}| = \frac{|\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}]|}$. □