4. Координаты в пространстве

4.1. Аффинная система координат

Будем считать, что далее рассматривается векторное пространство всех векторов пространства, зафиксирована некоторая аффинная система координат (O, δ), где $\delta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, или короче $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.

Абсолютно аналогично координатам на плоскости устанавливаются

Утв 1. *Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, вычисляются как $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.*

Утв 2. *Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, заданными своими координатами в некоторой декартовой системе координат, равно $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.*

Утв 3. *Если точка M делит $\overline{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ, то $M\left(\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$*

Формулы преобразования аффинной системы координат при переходе от $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ к $O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'\overrightarrow{e_3}'$ выглядят:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13} \\ y = y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23} \\ z = z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

где C — матрица перехода от базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ к базису $\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}'$, а точка O' имеет координаты (x_0, y_0, z_0) в $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.

4.2. Действия над векторами

Опр. ***Векторным произведением*** *векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$, который равен $\vec{0}$ если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, а если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то*

1. *$\vec{c}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$,*

2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$,

3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *— правый базис.*

Если два неколлинеарных вектора отложить от одной точки, то длина их векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на получившихся точках.

Опр. ***Смешанным произведением*** *векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *называется число, обозначаемое* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ *и равное* $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$.

Теор 1. *Абсолютная величина* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ *равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки.*

Док-во. Сначала заметим, что если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то утверждение очевидно (и то, и другое 0).

По определению, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) \cdot |\vec{c}|\cos([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$. Видим, что получили произведение площади параллелограмма $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$ со сторонами $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ и величины $|\vec{c}|\cos([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |\vec{c}|\cos(\vec{k}, \vec{c})$ проекции $\vec{c}$ на ось вектора $\vec{k}$. Модуль второго — высота параллелепипеда. □

Теор 2. *Пусть векторы* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *заданы координатами в правой декартовой системе координат. Тогда*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Док-во. Опять, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то все понятно.

Обозначим данную правую декартову систему координат, в которой даны координаты, через $O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ и введем систему координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ (снова, с правым ортонормированным базисом).

Отложим векторы от точки $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ и выберем декартову систему координат $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ так, что $\vec{i}$ сонаправлен с $\vec{a}$, вектор $\vec{j}$ параллелен плоскости OAB и на этой плоскости базис $(\vec{i}, \vec{j})$ одинаково ориентирован с $(\vec{a}, \vec{b})$, а $\vec{k}$ сонаправлен с $[\vec{a}, \vec{b}]$. Таким образом, базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

правый ортонормированный. В заданной системе координат $\vec{a}$ имеет координаты $(|\vec{a}|, 0, 0)$. С учетом Леммы 1 раздела об ориентации на плоскости, $\vec{b}$ имеет координаты $(|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), |\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), 0)$. Действительно, $\vec{i}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{b}}) = |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ для первой координаты и $\vec{j}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{b}}) = |\vec{b}|\cos((\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \vec{b}}))$, но базисы плоскости $(\vec{i}, \vec{j})$ и $(\vec{a}, \vec{b})$ ориентированы одинаково, поэтому $|\vec{b}|\cos((\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \vec{b}})) = |\vec{b}|\cos((\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})) = |\vec{b}|\cos((\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) - (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})) = |\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Вектор $\vec{c}$ — какие-то $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, причем $\gamma_3 = \vec{k}\,\vec{c} = |\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{k}, \vec{c}})$.

Продолжая запись предыдущего доказательства, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\cdot |\vec{c}|\cos(\widehat{[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}}) = \begin{vmatrix} |\vec{a}| & |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) & \gamma_1 \\ 0 & |\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) & \gamma_2 \\ 0 & 0 & |\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{k}, \vec{c}}) \end{vmatrix}$, получаем определитель матрицы перехода от базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Обозначим матрицу перехода от базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ через C_1, а матрицу перехода от $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ через C_2. Тогда матрица перехода от $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ есть C_1C_2, а ее определитель записан в (1). Но $|C_1C_2| = |C_1||C_2| = |C_1| \cdot \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, а матрица C_1 ортогональная (т.е. такая, что $A^{-1} = A^t$, и поэтому ее определитель равен ± 1) и $|C_1| = 1$, т.к. это матрица перехода между одинаково ориентированными ортонормированными базисами. Следовательно, $|C_1C_2| = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. □

Теор 3. *Пусть векторы* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *заданы координатами в правой декартовой системе координат. Тогда* $[\vec{a}, \vec{b}]$ *имеет координаты* $\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

Док-во. Найдем коэффициенты разложения $[\vec{a}, \vec{b}] = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ в линейную комбинацию векторов базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Имеем $\alpha = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{i} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{i} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ для первой координаты по Теореме 2 и аналогично для $\beta = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{j} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{j}$, и $\gamma = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{k} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{k}$. □

Утв 4 (Свойства). *1.* $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

2. $\alpha[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}]$
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
4. $\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\alpha\overrightarrow{\ )}c$
5. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$

Док-во. Напрямую следует из Теоремы 3 и Теоремы 2. $\square$