3. Прямая на плоскости

3.1. Уравнение прямой

Пусть дана прямая l на плоскости, на которой фиксирована некоторая аффинная система координат $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$.

Возьмем точку $M_0(x_0, y_0) \in l$ и ненулевой вектор $\overrightarrow{a}(a_1, a_2)$, параллельный l.

Вектор $\overrightarrow{a}$ называется **направляющим** для l.

Теор 1. *Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \end{cases} \qquad \textit{(\textbf{параметрические уравнения} прямой)} \tag{1}$$

для некоторого $t \in \mathbb{R}$.

Док-во. Пусть $M(x, y) \in l$. Тогда $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{a}$ коллинеарны и по Теореме 1 они линейно зависимы: $\alpha\overrightarrow{M_0M}+\beta\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ для ненулевого набора α, β. Отсюда $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{a}$ для $t = -\frac{\beta}{\alpha}$, т.к. $\alpha \neq 0$. Получаем равенство координат этих векторов (1).

Если есть (1), то $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{a}$ и векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{a}$ коллинеарны по Теореме 1. Значит $M \in l$. □

Получим некоторые другие виды уравнений.

(1) ⇒

$$a_2(x - x_0) = a_1(y - y_0) \tag{2}$$

(2) ⇒ (1): если $a_1 \neq 0$, то $y - y_0 = a_2(\frac{x-x_0}{a_1})$ и $x - x_0 = a_1(\frac{x-x_0}{a_1})$.

(2) ⇒

$$Ax + By + C = 0 \qquad (\textbf{общее уравнение} \text{ прямой}) \tag{3}$$

для $A = a_2$, $B = -a_1$ и $C = -a_2x_0 + a_1y_0$.

(3) ⇒ (2): всегда существует точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют (3). Подставив ее в (3), найдем $C = -Ax_0 - By_0$. Подставляя это C обратно в (3), получаем уравнение $A(x-x_0) = (-B)(y-y_0)$, т.е. уравнение (2).

Заметим здесь, что $(-B, A)$ — направляющий вектор для (3).

Если $a_1, a_2 \neq 0$, то (2) $\Rightarrow$

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \quad \text{(\textbf{каноническое уравнение} прямой)} \tag{4}$$

если $a_1 = 0$, то $\quad x - x_0 = 0, \quad$ а если $a_2 = 0$, то $\quad y - y_0 = 0$.

Если $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in l$, то возьмем $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и $M_0 = M_1$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{(уравнение прямой через две точки)} \tag{5}$$

В декартовой системе координат $a_1 = |\vec{a}| \cos\varphi$, $a_2 = |\vec{a}| \sin\varphi$ для $\varphi = (\widehat{\vec{e_1}, \vec{a}})$. Отсюда $k = \frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg}\varphi$ и

$$y = kx + b \quad \text{(уравнение \textbf{с угловым коэффициентом})} \tag{6}$$

3.2. Взаимное расположение прямых

Множество общих точек прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — решения системы $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

Возможны следующие случаи:

1. нет решений — прямые параллельны:

   $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} B_1 & -C_1 \\ B_2 & -C_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

   поэтому $A_1B_2 = A_2B_1$, и если, например, $A_1 \neq 0$, то $A_2 = \lambda A_1$, отсюда $A_1B_2 = \lambda A_1B_1$, умножая это на A_1^{-1} получаем $B_2 = \lambda B_1$,

   $$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 \neq \lambda C_1;$$

2. бесконечно много решений — прямые совпадают:

   $$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1;$$

3. единственное решение — прямые пересекаются:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{т.е. } A_1B_2 \neq A_2B_1, \text{ отсюда получаем, что}$$

не существует такого числа λ чтобы выполнялись равенства $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$.

3.3. Расстояние от точки до прямой

Опр. ***Расстоянием от точки до прямой*** *называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую.*

Опр. *Вектор называется* **перпендикулярным** *прямой, если он перпендикулярен любому вектору, параллельному данной прямой.*

Утв 1. *В декартовой системе координат вектор $\vec{n}(A, B)$ перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$.*

Док-во. Для прямой $Ax + By + C = 0$ вектор $\vec{a}(-B, A)$ является направляющим (т.е. параллелен ей). Запишем $\vec{a}\vec{n} = A(-B) + BA = 0 = |\vec{a}||\vec{n}|\cos(\vec{a}, \vec{n})$. Так как $\vec{a}, \vec{n} \neq \vec{0}$, получаем $(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$. □

Ненулевой вектор, перпендикулярный прямой называется **нормальным вектором** данной прямой.

Утв 2. *Расстояние от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, заданных в декартовой системе координат, вычисляется по формуле*

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Док-во. Пусть M — точка, не лежащая на прямой $l : Ax + By + C = 0$, а M_0M — перпендикуляр из M к l, где $M_0(x_0, y_0) \in l$. Тогда $\vec{n}\overrightarrow{M_0M} = |\vec{n}||\overrightarrow{M_0M}|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)$. Выражаем $|\overrightarrow{M_0M}| = \pm\frac{Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, тогда расстояние равно $\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. □

3.4. Угол между прямыми

Опр. *Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, образованных этими прямыми.*

Из определения, угол между прямыми α всегда $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Величина α угла между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, заданными в декартовой системе координат, может быть вычислена через угол между направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}(-B_1, A_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(-B_2, A_2)$. Имеем

$$\cos(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если $\cos(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) > 0$, то это $\cos\alpha$, а если $\cos(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) < 0$, то это $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$. Отсюда можно записать

$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

На интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция $\cos$ обратима, поэтому можно однозначно найти значение угла α.

? Заметим, что это значение совпадает со значением угла между нормальными векторами прямых $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2)$.
Если вместо рассматриваемых пар векторов взять какие-то коллинеарные им ненулевые векторы, то тоже получим это значение (множители вынесутся и сократятся).

Величина α угла между прямыми $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$, может быть вычислена

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1},$$

если, скажем, $\varphi_2 = \varphi_1 + \alpha$ или $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Это выражение так же позволяет однозначно найти значение угла α.

3.5. Уравнение пучка прямых

Опр. *Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку M, называется* ***пучком прямых*** *с центром M.*

Две данные [различные] прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ определяют пучок прямых, которые проходят через точку пересечения этих прямых.

Утв 3. *Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — две различные прямые. Прямая тогда и только тогда принадлежит тому же пучку прямых, что и две данные, когда ее уравнение есть*

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2) = 0 \quad \textit{(\textbf{уравнение пучка прямых})} \tag{7}$$

для некоторого ненулевого набора чисел α, β.

Док-во. Обозначим $M_0(x_0, y_0)$ точку пересечения данных прямых l_1 и l_2.

Пусть прямая m принадлежит пучку прямых, проходящих через M_0, и отлична от l_1 с l_2 (для самих l_1, l_2 все и так ясно). Возьмем произвольно точку $M(x', y') \in m$, отличную от M_0. После подстановки M в уравнение (7) становится очевидным, что если взять $\alpha = -(A_2x' + B_2y' + C_2)$ и $\beta = A_1x' + B_1y' + C_1$, то получим уравнение прямой m, которое имеет вид (7) и $\alpha, \beta \neq 0$.

Обратно. Очевидно, что координаты M_0 удовлетворяют уравнению (7), т.к. $M_0 \in l_1, l_2$. Чтобы $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2) = (\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+\alpha C_1+\beta C_1 = 0$ было уравнением прямой достаточно показать, что его коэффициенты при x, y одновременно не равны нулю. Предположим, что это не так и $\begin{cases} \alpha A_1 + \beta A_2 = 0 \\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \end{cases}$. Так как прямые l_1 и l_2 пересекаются, то определитель матрицы этой системы отличен от нуля. Поэтому она имеет лишь нулевое решение, а это противоречит тому, что α, β — ненулевой набор. Предположение неверно, а это доказывает, что (7) задает прямую. □

След 1. *Уравнение $\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0) = 0$ задает пучок прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$.*