2. Координаты на плоскости

2.1. Аффинная система координат

Опр. *Пара (O, δ), где O — некоторая точка, а δ — базис векторного пространства, называется* ***аффинной системой координат****.*

Опр. ***Координатами точки*** *M в аффинной системе координат (O, δ) называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе δ:*

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — координаты M в аффинной системе координат (O, δ);
$M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Если в пространстве, на плоскости или на прямой задана аффинная система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми точками [пространства, плоскости или прямой] и упорядоченными наборами действительных чисел [длины 3, 2 или 1].

Аффинная система координат, базис которой ортонормированный, называется [прямоугольной] **декартовой** системой координат.

Будем считать, что далее рассматривается векторное пространство всех векторов плоскости, зафиксирована некоторая аффинная система координат (O, δ), где $\delta = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, или короче $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$.

Утв 1. *Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, вычисляются как $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.*

Док-во. Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} - (x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2}) = (x_2 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{e_2}$. □

Опр. ***Расстоянием*** *между двумя точками A и B называется длина отрезка $\overline{AB}$.*

Утв 2. *Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, заданными своими координатами в некоторой декартовой системе координат, равно $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.*

Док-во. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Длина $|\overrightarrow{AB}|$ в ортонормированном базисе, как было показано ранее, вычисляется по формуле $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. □

Опр. *Говорят, что точка M **делит отрезок** $\overline{AB}$ **в отношении** λ, если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.*

Утв 3. *Если точка M делит $\overline{AB}$, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, в отношении λ, то $M\left(\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right)$*

Док-во. Пусть M имеет координаты x, y. Так как $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ или $x + \lambda x = \lambda x_2 + x_1$, отсюда $x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1+\lambda}$ и аналогично для второй координаты. □

2.2. Преобразование аффинной системы координат

Допустим, точка M задана своими координатами (x, y) в аффинной системе координат $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$. Возьмем какую-то новую систему координат $O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$. Пусть ее начало O' имеет координаты (x_0, y_0) в $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, а ее векторы $\overrightarrow{e_1}' = c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_2}' = c_{12}\overrightarrow{e_1} + c_{22}\overrightarrow{e_2}$.

Опр. ***Матрицей перехода*** *от базиса δ к δ' называется матрица, в столбцах которой записаны координаты векторов базиса δ' в базисе δ.*

Выразим координаты M в старой системе координат $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, через новые координаты $M(x', y')$ в $O'\overrightarrow{e_1}'\overrightarrow{e_2}'$.

Старые и новые координаты точки M — это, по определению, координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{O'M}$ в соотв. базисах. Имеем $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ или $x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} + x'\overrightarrow{e_1}' + y'\overrightarrow{e_2}' = x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} + x'(c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2}) + y'(c_{12}\overrightarrow{e_1} + c_{22}\overrightarrow{e_2}) = (x_0 + x'c_{11} + y'c_{12})\overrightarrow{e_1} + (y_0 + x'c_{21} + y'c_{22})\overrightarrow{e_2}$. Иначе,

$$\begin{cases} x = x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} \\ y = y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где C — матрица перехода от базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ к базису $\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}'$.

Формулы (1) называются **формулами преобразования** аффинной системы координат.

Примеры преобразований декартовой системы координат:

1. перенос начала координат в точку $O'(x_0, y_0)$:
   базис остается тот же, поэтому $C = E$,
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

2. поворот координатных векторов на угол φ:
   $\overrightarrow{e_1}'(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и для $\overrightarrow{e_2}'$ имеем $(\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi), \sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$,
   $C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$,
$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

2.3. Ориентация

Опр. *Говорят, что базисы δ и δ' одинаково ориентированы, если определитель матрицы перехода от δ к δ' больше нуля.*

На множестве всех базисов векторного пространства отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности, которое разбивает указанное множество на два класса. Базисы одного из классов называются правыми (с положительной ориентацией), другого — левыми (с отрицательной).

Действительно, пусть $(\overrightarrow{e_i})$, $(\overrightarrow{u_i})$, $(\overrightarrow{w_i})$ — базисы, $C = (c_{ij})$ — матрица перехода от $(\overrightarrow{e_i})$ к $(\overrightarrow{u_i})$, $D = (d_{ij})$ — матрица перехода от $(\overrightarrow{u_i})$ к $(\overrightarrow{w_i})$.

Проверим, что матрицей перехода от $(\overrightarrow{e_i})$ к $(\overrightarrow{w_i})$ будет CD:

$$\overrightarrow{w_k} = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\sum_{j=1}^{n} c_{ji}\overrightarrow{e_j} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ik}c_{ji}\overrightarrow{e_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ik}c_{ji}\overrightarrow{e_j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji}d_{ik}\right)\overrightarrow{e_j}.$$

Покажем, например, транзитивность. Если одинаково ориентированы базисы $(\overrightarrow{e_i})$ и $(\overrightarrow{u_i})$, а также $(\overrightarrow{u_i})$ и $(\overrightarrow{w_i})$, то $|C|, |D| > 0$. Это значит, что $|C||D| = |CD| > 0$, то есть $(\overrightarrow{e_i})$ и $(\overrightarrow{w_i})$ одинаково ориентированы.

Опр. *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы на плоскости.* ***Ориентированным углом*** *между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется*

1. *число $(\vec{a}, \vec{b})$, если система $\vec{a}, \vec{b}$ образует правый базис,*
2. *число $-(\vec{a}, \vec{b})$, если система $\vec{a}, \vec{b}$ образует левый базис,*
3. *число 0, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены,*
4. *число π, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.*

Обозначается $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

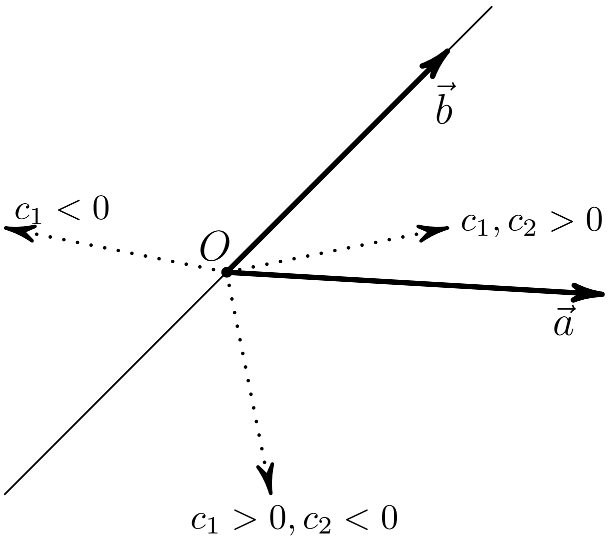
Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаем $-\pi < (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leqslant \pi$.

Лем 1. *Пусть ненулевой $\vec{a}$ имеет в правом ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}$ координаты (a_1, a_2). Тогда $a_1 = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$ и $a_2 = |\vec{a}|\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$.*

Док-во. $\vec{a}\,\vec{i} = |\vec{a}||\vec{i}|\cos(\vec{i}, \vec{a}) = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$.

Покажем, что $\cos((\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + (\widehat{\vec{b}, \vec{c}})) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$ верно для любых $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, отличных от нулевых. Пусть $\vec{c} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b}$ и векторы отложены от одной точки.

Тогда, если $c_1 < 0$ (и $\vec{a}, \vec{b}$ с $\vec{b}, \vec{c}$ одинаково ориентированы), то $\cos((\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + (\widehat{\vec{b}, \vec{c}})) = \cos((\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}))$ и $\vec{c}$ не лежит между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а поэтому $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c})$ равен либо $(\vec{a}, \vec{c})$, либо $2\pi - (\vec{a}, \vec{c})$. Если $c_1 > 0$, то $\cos((\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) +$



$(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})) = \cos((\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{c}))$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$ направлены в одну полуплоскость относительно $\vec{b}$, и значит $(\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})$.

$\vec{a}\vec{j} = |\vec{a}||\vec{j}|\cos(\vec{j}, \vec{a}) = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{a}}) = |\vec{a}|\cos((\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \vec{a}})) = |\vec{a}|\cos(-(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{i}, \vec{a}})) = |\vec{a}|\cos(-\frac{\pi}{2} + (\widehat{\vec{i}, \vec{a}})) = |\vec{a}|\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$ □

2.4. Полярная система координат

Опр. *Пара, состоящая из точки P и единичного вектора $\vec{p}$, называется полярной системой координат на плоскости.*

Для любой точки M рассматриваются числа $\rho = |PM|$ и $\varphi = (\widehat{\vec{p}, \overrightarrow{PM}})$.

Пара (ρ, φ) называется **полярными координатами** точки M в полярной системе координат $(P, \vec{p})$.

Зададим декартову аффинную систему координат $O\vec{i}\,\vec{j}$, вектор $\vec{i}$ которой совпадает с $\vec{p}$, а начало O — с полюсом P.

Пусть $M(\rho, \varphi)$ в полярной системе координат $(P, \vec{p})$. Найдем координаты $M(x, y)$ в декартовой аффинной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}$. Имеем $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, отсюда, умножая на векторы базиса, $x = |\overrightarrow{OM}|\cos(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ и $y = |\overrightarrow{OM}|\sin(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ по Лемме 1.

Таким образом, формулы перевода полярных координат в декартовы выглядят так

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi. \tag{2}$$

По декартовым координатам выведем полярные.

Возводя (2) в квадрат, получаем $\rho^2 = x^2 + y^2$. Отсюда получаем формулы перевода декартовых координат в полярные:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3}$$

Утв 4. *Расстояние между точками $A(\rho_1, \varphi_1)$ и $B(\rho_2, \varphi_2)$, заданными своими координатами в некоторой полярной системе координат, равно $|\overline{AB}| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.*

Док-во. Пусть координаты даны в системе координат $(P, \overrightarrow{p})$. Запишем $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}}) = (\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{PB}}) - (\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{PA}}) = \varphi_2 - \varphi_1$. Если векторы $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$ коллинеарны, то $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 1$ и $|\overline{AB}| = |\rho_1 \mp \rho_2|$, в зависимости от направленности векторов. Если $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$ неколлинеарны, то по теореме косинусов $|\overline{AB}|^2 = |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - 2|\overline{PA}||\overline{PB}|\cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. $\square$