1. Элементы векторной алгебры

Опр. *Лучи AB и CD (или отрезки AB и CD) называются* ***параллельными****, если прямые AB и CD [различны и] параллельны: $AB \parallel CD$.*

Опр. *Параллельные лучи AB и CD называются* ***одинаково направленными****, если они лежат в одной полуплоскости с границей AC.*

Лучи, лежащие на одной прямой, называются ***одинаково направленными****, если один из них содержит другой.*

Если два луча параллельны или лежат на одной прямой, но не одинаково направлены, то они называются ***противоположно направленными****.*

Опр. *Отрезок называется* ***направленным****, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы.*

Если A — первая точка, а B — вторая, то точка A называется началом, а B — концом этого направленного отрезка; его обозначают так: $\overline{AB}$.

Длину отрезка $\overline{AB}$ обозначают $|\overline{AB}|$.

Отрезок $\overline{AA}$ для любой точки A называется нулевым и считается, что $|\overline{AA}| = 0$.

Опр. *Ненулевые отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются* ***одинаково*** *(****противоположно****) направленными, если одинаково (противоположно) направлены лучи AB и CD.*

Нулевой направленный отрезок одинаково направлен с любым.

Опр. *Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются* ***эквиполлентными****, если они одинаково направлены и имеют равные длины.*

Лем 1. *Отношение эквиполлентности на множестве векторов плоскости (пространства) является отношением эквивалентности.*

Опр. *Класс эквиполлентных направленных отрезков называется* ***вектором****: $\overrightarrow{AB}$.*

Лем 2. *Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Док-во. Возможны случаи:

1. Если $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 0$, то $A = B$ и $C = D$, значит $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
2. $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на параллельных прямых: $ABCD$ — параллелограмм, значит $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ и они сонаправлены;
3. $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на одной прямой: пусть, например, луч AB содержит CD
   (a) если отрезки не пересекаются, то $|AC| = |AB| + |BC| = |CD| + |BC| = |BD|$
   (b) если пересекаются, то $|AC| + |CB| = |AB| = |CD| = |CB| + |BD|$, $|AC| = |BD|$

   и луч AC содержит BD.

$\square$

Опр. *Говорят, что точка M получена **откладыванием вектора** $\overrightarrow{a}$ от точки O, если $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$.*

Утв 1. *Пусть дана точка O и вектор $\overrightarrow{a}$. Тогда существует единственная точка M такая, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$.*

Док-во. Возьмем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$. Пусть $A \neq B$, т.к. иначе в качестве M можно брать O. Если данная точка O не принадлежит прямой AB, то существует прямая, параллельная AB и проходящая через O. От точки O можно отложить отрезок длины AB так, чтобы он был сонаправлен с $\overline{AB}$. Конец этого отрезка обозначим M. Если точка O принадлежит прямой AB, то от O можно отложить отрезок длины AB так, чтобы он был сонаправлен с $\overline{AB}$. Так же конец этого отрезка обозначим M. По построению, M — искомая точка.

Покажем единственность. Допустим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM'}$ для некоторой точки M'. Тогда $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ и по Лемме 2 имеем $|\overline{MM'}| = |\overline{OO}| = 0$. То есть $M = M'$. $\square$

Опр. *Говорят, что вектор **параллелен прямой**, если любой его направленный отрезок параллелен этой прямой или лежит на ней;*

...вектор ***параллелен плоскости****, если он параллелен некоторой прямой на этой плоскости;*

...векторы ***коллинеарны****, если они параллельны некоторой прямой;*

...векторы ***компланарны****, если они параллельны некоторой плоскости;*

...коллинеарные ***векторы одинаково (противоположно) направлены****, если одинаково (противоположно) направлены их элементы.*

Опр. ***Длиной*** *вектора* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *называется длина его элементов:* $|\overrightarrow{a}| = |\overline{AB}|$.

Для $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *вектор* $\overrightarrow{BA}$ *называется* ***противоположным*** *к* $\overrightarrow{a}$ *и обозначается* $-\overrightarrow{a}$.

Вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA}$ *для любой точки* A *называется* ***нулевым*** *вектором и обозначается* $\overrightarrow{0}$.

1.1. Действия над векторами

Опр. *Суммой векторов* $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ *называется вектор* $\overrightarrow{c}$ *такой, что если* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, *то* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.

Утв 2. *Сумма векторов существует и определена однозначно.*

Док-во. Отложим $\overrightarrow{a}$ от произвольной точки A, полученную точку обозначим B, т.е. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$. Отложим $\overrightarrow{b}$ от точки B, полученную точку обозначим C, т.е. $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ – искомая сумма $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Допустим $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{b}$. Отложим $\overrightarrow{a}_1$ от произвольной точки A_1, $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, и $\overrightarrow{b}_1$ от получившейся точки B_1, $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{B_1C_1}$. Тогда по Лемме 2 получаем $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ и снова по Лемме 2 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. □

? Это позволяет к обеим частям равенства прибавлять равные векторы.
В целом же этим установлено, что определена бинарная операция на рассматриваемом множестве векторов, т.е. всюду определенное и однозначное соответствие.

Для сложения векторов можно применять правило треугольника и (для неколлинеарных) правило параллелограмма.

Утв 3 (Свойства). *1.* $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$

2. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$

3. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

4. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Док-во. 3) Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда по Лемме 2 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Но $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$. □

Опр. *Разностью $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.*

Утв 4. *Разность векторов существует и определена однозначно.*

Док-во. Возьмем в качестве $\vec{c}$ вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$. Тогда $\vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{b})) = \vec{a}$.

Если $\vec{c'} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{b} + \vec{c'} = \vec{a}$. Прибавим к обеим частям равенства $-\vec{b}$, $\vec{c'} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$. □

Из $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ получаем $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Опр. *Произведением $\vec{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется вектор, обозначаемый $\alpha\vec{a}$, такой, что $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$ и [если $\vec{a} \neq \vec{0}$] $\alpha\vec{a}$ одинаково направлен с $\vec{a}$, если $\alpha \geqslant 0$, и $\alpha\vec{a}$ противоположно направлен с $\vec{a}$, если $\alpha < 0$.*

Утв 5. *Произведение вектора на число существует и определено однозначно.*

Док-во. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Отложим от точки A на прямой AB точку C на расстоянии $|\alpha||\vec{a}|$ так, чтобы $\overline{AC}$ был сонаправлен с $\overline{AB}$, если $\alpha \geqslant 0$, и так, чтобы $\overline{AC}$ был противоположно направлен с $\overline{AB}$, если $\alpha < 0$. Тогда по построению $\overrightarrow{AC}$ есть произведение α на $\vec{a}$.

Допустим $\vec{b}$ есть произведение α на $\vec{a}$. Тогда $|\vec{b}| = |\overrightarrow{AC}|$ и $\vec{b}$ сонаправлен с $\overrightarrow{AC}$ по определению произведения. Получили $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. □

Утв 6 (Свойства). *1.* $1\vec{a} = \vec{a}, \quad 0\vec{a} = \vec{0}, \quad \alpha\vec{0} = \vec{0}$

2. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

3. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

5. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Док-во. Покажем следующие свойства в предположении $\alpha, \beta \neq 0$ и $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, т.к. в противном случае все получается тривиально.

3) Имеем $|\alpha(\beta\vec{a})| = |(\alpha\beta)\vec{a}|$. Если $\alpha\beta > 0$, то $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ сонаправлены, $(\alpha\beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$ также сонаправлены. Если $\alpha\beta < 0$, то $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ противоположно направлены, $(\alpha\beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$ также противоположно направлены. Поэтому $\alpha(\beta\vec{a})$ и $(\alpha\beta)\vec{a}$ сонаправлены.

4) Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Выберем точку O, не лежащую на прямых AB, BC и AC. Построим точки A', B' и C' так, чтобы $\alpha\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $\alpha\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ и $\alpha\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC'}$. Треугольник AOB подобен треугольнику $A'OB'$ по двум сторонам и углу O, т.е. $\alpha\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Аналогично, $\alpha\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ и $\alpha\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Таким образом, $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$.

5) Пусть $\alpha\beta > 0$ и $\alpha\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\beta\vec{a} = \overrightarrow{BC}$. Так как $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}| = |\alpha + \beta||\vec{a}|$. Если $\alpha + \beta > 0$, т.е. при $\alpha, \beta > 0$, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, а если $\alpha + \beta < 0$, то противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta)\vec{a}$.

Пусть $\alpha\beta < 0$. Если $\alpha + \beta = 0$, то $\alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{a} = \vec{0}$. Если $\alpha + \beta \neq 0$, то $\alpha + \beta$ имеет либо знак α, либо β. Допустим $-\alpha$ и $\alpha + \beta$ одного знака. Тогда $(-\alpha)\vec{a} + (\alpha + \beta)\vec{a} = (-\alpha + \alpha + \beta)\vec{a} = \beta\vec{a}$. Прибавив к обоим частям $\alpha\vec{a}$ получаем $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. □

1.2. Скалярное произведение векторов

Опр. ***Углом между векторами*** *$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ называется угол между лучами OA и OB (т.е. наименьший из углов, образованных этими лучами): $(\vec{a}, \vec{b})$.*

Из определения следует, что $0 \leqslant (\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \pi$. По определению полагается, что $(\vec{a}, \vec{0}) = \frac{\pi}{2}$.

Опр. ***Скалярным произведением*** *векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ [или короче $\vec{a}\,\vec{b}$], равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$.*

Утв 7 (Свойства). *1. $\vec{a}\,\vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны*

2. $\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

3. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

4. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$

1.3. Линейная зависимость и координаты векторов

Опр. *Вектор $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$, где $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — некоторые векторы, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые числа, называют **линейной комбинацией** векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.*

В этом случае говорят, что вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Опр. *Система векторов (т.е. упорядоченный набор) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля (т.н. ненулевой набор), для которых $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$.*

*Система векторов называется **линейно независимой**, если она не является линейно зависимой.*

След 1. *Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независима, если из равенства $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.*

Теор 1. *Система векторов $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

Система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Док-во. Пусть $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0}$, причем $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{b}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и отличны от $\vec{0}$. Тогда, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, положим $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Получаем, что $\alpha \vec{b} = \vec{a}$, отсюда $1 \cdot \vec{a} + (-\alpha) \vec{b} = \vec{0}$.

Допустим $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = \vec{0}$, где хотя бы одно из чисел α_i отлично от нуля. Если коэффициент при каком-то векторе равен нулю, то другие два вектора будут коллинеарны, а все три будут компланарны. Поэтому будем далее предполагать, что α_1, α_2 и α_3 отличны от нуля. Тогда $\vec{a} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{b} + (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{c})$. Взяв $\overrightarrow{AB} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{c}$, получаем $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, следовательно векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны плоскости ABC, а значит компланарны.

Пусть теперь $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны и отличны от $\vec{0}$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует ненулевой набор α_1, α_2, что $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} = \vec{0} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то пускай $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Возможно, C лежит на прямой OA или OB. Тогда $\vec{c}$ коллинеарен с $\vec{a}$ или $\vec{b}$, что влечет линейную зависимость $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как и выше. А возможно, что C не лежит на указанных прямых. В этом случае существует прямая, параллельная OB и проходящая через C, которая пересекает OA в некоторой точке C_1. Тогда $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}$.

□

Опр. ***Векторным пространством*** *назовем любое множество векторов, замкнутое относительно сложения векторов и умножения числа на вектор.*

Опр. ***Базисом*** *векторного пространства называется линейно независимая система векторов такая, что любой вектор пространства линейно выражается через векторы этой системы.*

Теор 2. *Любая система неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ является базисом векторного пространства всех векторов плоскости.*

Любая система некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является базисом векторного пространства всех векторов трехмерного пространства.

Док-во. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. По Теореме 1 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы. Для любого $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а значит линейно зависимы по Теореме 1. Найдется ненулевой набор $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой, что $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = \vec{0}$. Если $\alpha_3 = 0$, то $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} = \vec{0}$, где α_1, α_2 – ненулевой набор, чего быть не может. Поэтому $\alpha_3 \neq 0$, а значит $\vec{c} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\vec{a} + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\vec{b})$.

Возьмем теперь некомпланарные $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. По Теореме 1 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы. Заметим, что среди них нет нулевого вектора. Покажем, что всякий $\overrightarrow{d}$ линейно выражается через эти векторы. Возьмем произвольно $\overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{0}$ и отложим векторы от некоторой точки O: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD}$. Если точка D лежит на прямой OC, то $\overrightarrow{d}$ и $\overrightarrow{c}$ коллинеарны и поэтому зависимы, отсюда $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{c}$. Если же D не лежит на прямой OC, то $\overrightarrow{d}$ и $\overrightarrow{c}$ неколлинеарны. Проведем через D прямую, параллельную OC. Она обязана пересекать плоскость OAB в некоторой точке D'. Получаем $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$, но $\overrightarrow{OD'}$ компланарен с $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а $\overrightarrow{D'D}$ коллинеарен $\overrightarrow{c}$. Таким образом, $\overrightarrow{OD'}$ линейно выражается через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, которые образуют базис на плоскости, как показано выше, и поэтому $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$ для некоторых чисел α, β, γ. □

След 2. *Любой вектор пространства единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов базиса.*

Док-во. Допустим $\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{e_n}$, где $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ – базис. Тогда $(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{e_2} + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$. Но векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ линейно независимы, поэтому для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\alpha_i - \beta_i = 0$ или $\alpha_i = \beta_i$. □

След 3. *Любой базис векторного пространства всех векторов состоит из трех векторов.*

Размерностью векторного пространства называется число векторов в его базисе. Поэтому рассматриваемое нами пространство всех геометрических векторов называется трехмерным.

Опр. *Пусть дан базис $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ векторного пространства. Если $\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{e}_1 + \alpha_2\overrightarrow{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{e}_n$, то коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ этой линейной комбинации называются **координатами вектора** $\overrightarrow{a}$ в данном базисе:*

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – координаты $\overrightarrow{a}$ в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n$;

$\overrightarrow{a}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Из определения и свойств следуют правила действий над векторами в координатах: сложение, вычитание, умножение на число.

Опр. *Базис векторного пространства называется **ортонормированным**, если все его векторы попарно взаимно перпендикулярны и их длины равны* 1.

Утв 8. *Длина вектора $\vec{a}$, который имеет координаты (a_1, a_2, a_3) в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.*

Док-во. По определению $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Если все координаты равны нулю, то формула очевидно верна. Допустим, две координаты из трех равны нулю: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1$, где $a_1 \neq 0$. Тогда $|\vec{a}| = |a_1||\vec{e}_1| = |a_1| \cdot 1 = \sqrt{a_1^2 + 0 + 0}$.

Пусть теперь $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, где $a_1, a_2 \neq 0$. В этом случае $|\vec{a}|$ есть длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $|a_1\vec{e}_1| = |a_1|$ и $|a_2\vec{e}_2| = |a_2|$. По теореме Пифагора $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 0}$.

Допустим $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, где $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{a}$ от некоторой точки O и получившиеся точки обозначим E_1, E_2, E_3 и A соответственно. Вектор $\vec{a}$ неколлинеарен с $\vec{e}_3$, поэтому существует прямая, проходящая через A параллельно $\vec{e}_3$. Эта прямая пересекает плоскость OE_1E_2 в некоторой точке A'. Таким образом, $\vec{a} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A}$. Здесь $\overrightarrow{OA'}$ компланарен с $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и поэтому линейно выражается через них, а $\overrightarrow{A'A}$ коллинеарен с $\vec{e}_3$, т.е. можно записать $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Но по Следствию 2 $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_3 = a_3$, $\alpha_3 = a_3$. Как установлено выше, $|\overrightarrow{OA'}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Тогда по теореме Пифагора получаем $|\vec{a}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA'}|^2 + |\overrightarrow{A'A}|^2} = \sqrt{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 + |a_3|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. □

1.4. Свойства скалярного произведения векторов

Используя ортонормированный базис легко получается следующее

Утв 9 (Свойства).

1. *$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, где $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ — координаты в некотором ортонормированном базисе*
2. *$(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$*
3. *$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$*

Док-во. 1) Если один из векторов нулевой, то формула тривиальна. Будем считать, что это не так.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то из предположения $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ имеем $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{a}) = |\alpha||\vec{a}|^2\cos(\vec{a},\alpha\vec{a})$. Где, если $\alpha \geqslant 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т.е. $\cos(\vec{a},\alpha\vec{a}) = 1$ и $|\alpha| = \alpha$, и если $\alpha < 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, $\cos(\vec{a},\alpha\vec{a}) = -1$ и $|\alpha| = -\alpha$. Получаем $\vec{a}\,\vec{b} = \alpha|\vec{a}|^2 = \alpha(a_1^2+a_2^2+a_3^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Допустим, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. По теореме косинусов $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\vec{a},\,\vec{b})$. Выражая последнее, $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\vec{a},\,\vec{b}) = \vec{a}\,\vec{b} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b}-\vec{a}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Оставшиеся свойства устанавливаются с использованием 1), выбирая некоторый ортонормированный базис пространства. □

След 4. *Пусть* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ — *координаты векторов в некотором ортонормированном базисе. Тогда* $(\vec{a},\,\vec{b}) = \arccos\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Док-во. Действительно, по определению $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\,\vec{b})$, отсюда $\cos(\vec{a},\,\vec{b}) = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Так как $0 \leqslant (\vec{a},\,\vec{b}) \leqslant \pi$, а на этом интервале функция $\cos$ имеет обратную, получаем нужное выражение. □